

Corrigé du devoir surveillé n° 1

Connaissance du cours

1) • Soit $\sum_{n \geq 1} u_n := \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(1/\sqrt{n}) - 1}{\tan(1/n) - 1}$.

Au numérateur : comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et que $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$,

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

Au dénominateur : $\tan(1/n) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 \neq 0$, donc :

$$\tan(1/n) - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -1.$$

Finalement :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-\frac{1}{2n}}{-1} = \frac{1}{2n}.$$

De plus : $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{2n} \geq 0$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n}$ est divergente (multiple de la série harmonique).

Par le théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 1} u_n$ est divergente également.

• Soit $\sum_{n \geq 1} v_n := \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^{4/3}}$.

Prenons un exposant $\alpha \in]1, 4/3[$ (par exemple $\alpha := 7/6$) et constatons que $v_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$:

$$n^\alpha \times v_n = \frac{\ln(n)}{n^{4/3-\alpha}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CC} 0 \quad \text{car } \frac{4}{3} - \alpha > 0.$$

De plus : $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq 0$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $\alpha > 1$).

Par le théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente également.

2) Soit $\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} \binom{3n}{n} a^{-n}$.

Puisque : $\forall n \geq 0$, $u_n > 0$, on peut appliquer la règle de d'Alembert :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\binom{3n+3}{n+1} a^{-(n+1)}}{\binom{3n}{n} a^{-n}} = \frac{(3n+3)!}{(n+1)! \cdot (2n+2)!} \times \frac{n! \cdot (2n)!}{(3n)!} \times a^{-n} \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1) \cdot (2n+2)(2n+1) \cdot a} \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(3n)^3}{n(2n)^2 a} = \frac{27n^3}{4n^3 a} = \frac{27}{4a} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{27}{4a}. \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ Si $\frac{27}{4a} < 1$, c.à.d. $a > 4/27$: la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

$\hookrightarrow$ Si $\frac{27}{4a} > 1$, c.à.d. $a < 4/27$: la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge **grossièrement**.

$\hookrightarrow$ Si $\frac{27}{4a} = 1$, c.à.d. $a = 4/27$: la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

3) a. Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy des séries** $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ de terme général :

$$\forall n \geq 0, \quad w_n = \sum_{\substack{k, \ell \geq 0 \\ k+\ell=n}} u_k v_\ell = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

b. Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs d'un (même) $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre quand :

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0_E \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_k = 0 \right].$$

c. La **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie est le nombre de vecteurs que comportent chacune de ses bases.

d. Le **rang d'une famille de vecteurs** est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre : si $e_1, \dots, e_p$ sont des vecteurs d'un (même) espace vectoriel E :

$$\text{rg}(e_1, e_2, \dots, e_p) := \dim(\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)).$$

4) Soit $V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

* $\text{Card}(V_1, V_2, V_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$;

$$* \det(V_1, V_2, V_3) = \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car } L_3 = -2L_1$$

donc (V_1, V_2, V_3) n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

$$5) \text{ a. } \text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} = 3 :$$

on a effectué les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ puis $L_3 \leftarrow 6L_3 - L_2$ et la matrice finale est échelonnée à 3 pivots.

b. On a : $\dim(\text{Im } M) = \text{rg}(M) = 3$ et par le théorème du rang matriciel, $\dim(\text{Ker } M) = n_{\text{col}}(M) - \dim(\text{Im } M) = 4 - 3 = 1$.

c. L'application linéaire canoniquement associée à M est l'application :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ V & \longmapsto & M V \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x+3y+3z \\ 2x+6z-t \\ y+2z+t \end{pmatrix} \end{cases}$$

d. Puisque $\dim(\text{Ker } f) = \dim(\text{Ker } M) \neq 0$, $\text{Ker}(f) \neq \{0_{4,1}\}$ donc f n'est pas injective (et donc pas bijective).

En outre, $\dim(\text{Im } f) = \text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 3$ tandis que $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$, donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, ce qui prouve que f est surjective.

6) a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ **tous distincts**.

Les **polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(a_0, a_1, \dots, a_n)$** sont les polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ définis par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket : L_k(X) = \frac{\prod_{j \neq k} (X - a_j)}{\prod_{j \neq k} (a_k - a_j)},$$

(où l'indice j varie entre 0 et n en évitant la valeur k)

b. La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange vaut 1 :

$$\sum_{k=0}^n L_k(X) = 1.$$

Démonstration. Posons les polynômes $Q_1(X) := \sum_{k=0}^n L_k(X)$ et $Q_2(X) := 1$.

Comme tous les L_k sont de degré n , $\deg(Q_1) \leq n$ donc Q_1 et Q_2 sont tous les deux de degré au plus n .

Comparons leurs valeurs aux a_j pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$Q_1(a_j) = \sum_{k=0}^n L_k(a_j) = 0 + \dots + 0 + \underset{(k=j)}{1} + 0 + \dots + 0 = 1 = Q_2(a_j).$$

Les polynômes Q_1 et Q_2 sont de degré au plus n et prennent la même valeur en $(n+1)$ points distincts : ils sont donc égaux.

7) Développement limités usuels à l'ordre 3

► Famille de $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{sommes géométriques})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (x \leftarrow -x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{primitivation})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (x \leftarrow x^2 \text{ dans } \frac{1}{1+x})$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{primitivation})$$

► Exposants : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ une **constante** :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{Taylor})$$

► Famille de l'exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{Taylor})$$

$$\text{ch}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{partie paire})$$

$$\text{sh}(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{partie impaire})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{ch}(x) \text{ alterné})$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (\text{sh}(x) \text{ alterné})$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0) \quad (\sin(x)/\cos(x))$$

Exercice 1

Soit $M = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

1) À l'aide d'un polynôme annulateur de M .

a. * Calculons M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

On obtient de même : $M^3 = \begin{pmatrix} -10 & 9 & -9 \\ 6 & -4 & 3 \\ 24 & -21 & 20 \end{pmatrix}$

* Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$. Alors :

$$P(M) = 0_3$$

$$\Leftrightarrow M^3 + aM^2 + bM + cI_3 = 0_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & 9 & -9 \\ 6 & -4 & 3 \\ 24 & -21 & 20 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 + 3a - 2b + c = 0 \\ 3 - 2a + b = 0 \\ 24 - 2a + 8b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + c + 3a - 2b = 0 \\ 2a - b = 3 \\ 2a - 8b = 24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c + 3a - 2b = 4 \\ 2a - b = 3 \\ -7b = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + 3a - 2b = 4 \\ 2a - b = 3 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a = 0 \\ b = -3 \end{cases}$$

Réciproquement, on vérifie que les coefficients $(a, b, c) = (0, -3, -2)$ permettent bien d'annuler tous les coefficients de la matrice $P(M)$.

Conclusion : Le polynôme $P := X^3 - 3X - 2$ est l'unique polynôme annulateur de M unitaire de degré 3.

b. Le polynôme P admet -1 pour racine évidente. Partant :

$$P(X) = X^3 - 3X - 2 = (X + 1)(X^2 - X - 2) = (X + 1)(X + 1)(X - 2)$$

$$= (X + 1)^2 (X - 2).$$

c. • Fixons $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que :

$$\begin{cases} X^n = P(X)Q(X) + R(X) \\ \deg(R) < \deg(P) = 3. \end{cases} \quad (*)$$

Le polynôme R s'écrit donc : $R(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n$ pour 3 réels a_n, b_n, c_n .

• En évaluant $(*)$ en 2 et en -1 :

$$\begin{cases} 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ a_n - b_n + c_n = (-1)^n. \end{cases}$$

En dérivant $(*)$: $nX^{n-1} = P'(X)Q(X) + P(X)Q'(X) + 2a_n X + b_n$;
puisque -1 est racine double de P , il annule $P(X)$ et $P'(X)$, d'où :

$$-2a_n + b_n = n(-1)^{n-1}.$$

• Il s'agit alors de résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ -2a_n + b_n = n(-1)^{n-1} \end{cases}$$

Une résolution soignée par la méthode du pivot de Gauss donne :

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{9} (2^n - (-1)^n - 3 \cdot n(-1)^{n-1}) \\ b_n = \frac{1}{9} (2 \cdot 2^n - 2(-1)^n + 3 \cdot n(-1)^{n-1}) \\ c_n = \frac{1}{9} (2^n + 8 \cdot (-1)^n + 6 \cdot n(-1)^{n-1}). \end{cases}$$

Conclusion : $R_n(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n$ avec les valeurs de a_n, b_n, c_n ci-dessus.

d. • Puisque P est un polynôme annulateur de M , quand on applique $(*)$ en M , on obtient :

$$\begin{aligned} M^n &= \overbrace{P(M)}^{=0_3} Q(M) + R(M) \\ &= a_n M^2 + b_n M + c_n I_3. \end{aligned}$$

• En utilisant les expressions de a_n, b_n et c_n de la question précédente et en factorisant par $2^n, (-1)^n$ et $n(-1)^{n-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} M^n &= 2^n A + (-1)^n B + n(-1)^{n-1} C \quad \text{pour} \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{9} (M^2 + 2M + I_3) \\ B &= \frac{1}{9} (-M^2 - 2M + 8I_3) \\ C &= \frac{1}{9} (-3M^2 + 3M + 6I_3). \end{aligned} \end{aligned}$$

Remarque. En utilisant l'expression de M^2 calculée au début de l'exercice, on trouve finalement :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Par réduction de la matrice M .

On introduit la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Écrivons $T = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On constate que $D \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N \times D$,
donc les matrices D et N commutent.

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k}.$$

On remarque de plus que $N^2 = 0_3$, donc $N^k = 0_3$ dès que $k \geq 2$.
On obtient :

$$\begin{aligned} T^n &= D^n + n N D^{n-1} + 0_3 + \dots + 0_3 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b. Montrons que $M \stackrel{\mathcal{S}}{\sim} T$; pour cela, on montre que M et T représentent un même endomorphisme dans 2 bases différentes.

Posons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à M (de sorte que $\text{mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f) = M$).

Cherchons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$.

* **Analyse.** Supposons que $\mathcal{B}$ convienne. Nécessairement :

$$f(e_1) = 2e_1, \quad f(e_2) = -e_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_2 - e_3.$$

* **Synthèse.** On ne suppose plus rien sur $\mathcal{B}$, et on la construit.

Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ quelconque. Alors :

$$\begin{aligned} f(V) = 2V &\iff MV = 2V \iff (M - 2I_3)V = 0_{3,1} \\ &\iff V \in \text{Ker}(M - 2I_3). \end{aligned}$$

Or : $M - I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 8 & -7 & 4 \end{pmatrix}$. On remarque que $C_1 - 2C_3 = 0_{3,1}$:

on prend $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et alors $f(e_1) = 2e_1$.

De même :

$$\begin{aligned} f(V) = -V &\iff MV = -V \iff (M + I_3)V = 0_{3,1} \\ &\iff V \in \text{Ker}(M + I_3). \end{aligned}$$

Or : $M - I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & -7 & 7 \end{pmatrix}$. Cette fois, $C_2 + C_3 = 0_{3,1}$:

on prend $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et alors $f(e_2) = -e_2$.

Enfin :

$$f(V) = e_2 - V \iff (M + I_3)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En observant $M - I_3$, on voit que $C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On prend $e_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et alors $f(e_3) = e_2 - e_3$.

Reste à voir que $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

• $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$;

$$\bullet \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

donc $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$, et $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$.

Conclusion : M et T représentent un même endomorphisme, donc elles sont semblables.

c. En reprenant les notations de la question précédente, appliquons le théorème de changement de base à l'application f , de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ construite dans la synthèse. On obtient :

$$M = P T P^{-1} \quad \text{pour la matrice de passage} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

d. On déduit de ce qui précède :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} : \quad M^n &= (P T P^{-1})^n \\ &= (P T P^{-1}) \cdot (P T P^{-1}) \cdot \dots \cdot (P T P^{-1}) \\ &= P T^n P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}.\end{aligned}$$

e. Par la méthode du miroir de Gauss-Jordan, on trouve (...) :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

f. Pour alléger les calculs, on écrit la matrice T^n sous la forme :

$$T^n = 2^n A' + (-1)^n B' + n(-1)^{n-1} C',$$

où les matrices A' , B' et C' sont les matrices très simples :

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec ces écritures :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad M^n = 2^n \underbrace{(P A' P^{-1})}_{A''} + (-1)^n \underbrace{(P B' P^{-1})}_{B''} + n(-1)^{n-1} \underbrace{(P C' P^{-1})}_{C''}.$$

Un calcul patient donne les résultats suivants :

$$A'' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B'' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien la même expression que dans la première partie de l'exercice !

Exercice 2

Raffinement de la formule de Stirling

1) a. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et calculons $\int_1^n \ln(t) dt$.

$$\begin{aligned}\text{Posons, pour tout } t \geq 1 : \quad & u(t) = \ln(t) & v'(t) &= 1 \\ & u'(t) = \frac{1}{t} & v(t) &= t.\end{aligned}$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, n]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}I_n &= \left[t \ln(t) \right]_1^n - \int_1^n \frac{1}{t} \cdot t dt = n \ln(n) - 1 \ln(1) - \int_1^n 1 dt \\ &= n \ln(n) - n + 1.\end{aligned}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, estimons $S_n := \sum_{k=1}^n \ln(k)$ par la méthode des rectangles.

La fonction $\ln$ est continue et croissante sur $[1, +\infty[$. Pour cette raison :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt \leq \ln(k+1).$$

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et sommons pour $k \in [1, n-1]$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(t) dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1)$$

$$\text{d'où :} \quad S_n - \ln(n) \leq \int_1^n \ln(t) dt \leq S_n - \ln(1)$$

$$\text{et finalement :} \quad I_n \leq S_n \leq I_n + \ln(n)$$

$$\underbrace{n \ln(n) - n + 1}_{a_n} \leq S_n \leq \underbrace{n \ln(n) - n + 1 + \ln(n)}_{b_n}.$$

Les termes a_n et b_n s'écrivent $n \ln(n) + o(n \ln(n))$ donc sont équivalents à $n \ln(n)$. Par le théorème de l'équivalent par encadrement, on obtient :

$$S_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \ln(n).$$

c. Remarquons que $S_n = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln\left(\prod_{k=1}^n k\right) = \ln(n!)$. La question précédente donne donc :

$$\ln(n!) = S_n = n \ln(n) + o(n \ln(n))$$

$$= n \ln(n) (1 + o(1)),$$

puis en appliquant l'exponentielle :

$$\begin{aligned} n! &= \exp(n \ln(n) (1 + o(1))) \\ &= \exp(n (1 + o(1)) \times \ln(n)) \\ &= n^{n(1+o(1))}. \end{aligned}$$

2) La formule de Stirling s'écrit :
$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}, \quad v_n = \ln(u_n) \quad \text{et} \quad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

3) a. Estimons w_n :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 : \quad w_n &= v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}\right) \\ &= \ln\left((n+1) \times \frac{(n+1)^n}{n^n} \times \frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}} \times \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \times \frac{n!}{(n+1)!}\right) \\ &= \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} \times e^{-1}\right) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on peut utiliser le DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)_{x \rightarrow 0} : \\ w_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\ &= (1-1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \rightarrow \infty} \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

b. La question précédente montre que $w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$; comme $\frac{1}{12n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{12n^2}$ converge (multiple de série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$), la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge par le théorème de comparaison.

4) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs et $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs, telles que

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge.}$$

a. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n$, on a $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Cette limite s'écrit en langage formel :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall n \geq n_0 : \left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Pour notre ε , il existe donc un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| \leq \varepsilon, \quad \text{donc} \quad -\varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} - 1 \leq \varepsilon, \quad \text{puis} \quad 1 - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1 + \varepsilon,$$

et finalement : $(1 - \varepsilon) b_n \leq a_n \leq (1 + \varepsilon) b_n$ en multipliant par $b_n \geq 0$.

b. • Fixons un $\varepsilon > 0$ (par exemple $\varepsilon = 1$). De la question précédente, retenons qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ pour lequel :

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq a_n \leq (1 + \varepsilon) b_n.$$

Par linéarité de la sommation, la série $\sum_{n \geq 1} (1 + \varepsilon_n) b_n$ est convergente car $\sum_{n \geq 1} b_n$ l'est ; il en est de même pour $\sum_{n \geq n_0} (1 + \varepsilon_n) b_n$.

Par le théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq n_0} a_n$ est donc convergente,

et la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ également.

• Montrons que $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$, c'est-à-dire :

$$\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la question 4a, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \geq n_0 : \quad (1 - \varepsilon) b_k \leq a_k \leq (1 + \varepsilon) b_k.$$

Soit $n \geq n_0$ quelconque. L'encadrement ci-dessus est valable pour tout $k \geq n+1$ et fait intervenir les termes généraux de 3 séries convergentes. On peut donc sommer les inégalités pour $k \in \llbracket n+1, \infty \rrbracket$:

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Les b_k sont strictement positifs donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k > 0$; on peut diviser et conserver les inégalités :

$$1 - \varepsilon \leq \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k} \leq 1 + \varepsilon.$$

On vient donc de démontrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 : \left| \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k} - 1 \right| \leq \varepsilon ;$$

cela prouve l'équivalent : $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$.

5) Rappelons que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, donc ses restes R_n existent. Par la méthode des rectangles, on cherche à estimer :

$$R_{n,N} := \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2}.$$

Par les techniques habituelles, on parvient à l'encadrement :

$$\forall n, N \in \mathbb{N} / 1 \leq n < N : \frac{1}{n} - \frac{1}{N} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

Quand $N \rightarrow \infty$, tous les termes ci-dessus ont une limite ; en passant à la limite dans les inégalités larges :

$$\forall n \geq 1 : \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

Le minorant est équivalent à $\frac{1}{n}$ car $\frac{1}{n^2}$ est négligeable devant $\frac{1}{n}$ quand $n \rightarrow \infty$. Par le théorème des gendarmes pour les équivalents :

$$R_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

6) a. On a vu précédemment que : $w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. À partir d'un certain rang n_0 , ces deux suites sont de même signe, donc sont tous les deux strictement positifs.

Puisque la série $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n^2}$ converge, on peut appliquer le résultat de la question précédente et obtenir successivement :

$$\forall n \geq n_0 : \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{12k^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{12n}.$$

b. Les définitions des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ donnent :

$$n! = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{u_n} = n^n e^{-n} \sqrt{n} \cdot e^{-v_n}. \quad (*)$$

Cherchons un développement asymptotique de $-v_n$, en utilisant la série télescopique :

$$-v_n = -\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) - v_1 = -\sum_{k=1}^{n-1} w_k - v_1 = R_{n-1} - S - v_1,$$

où S est la somme de la série $\sum_{n \geq 1} w_n$.

Dans cette écriture, $-S - v_1$ est une constante K ; de plus :

$$R_{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{12(n-1)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{12n} \quad \text{donc} \quad R_{n-1} = \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On obtient alors :

$$-v_n = K + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Appliquons l'exponentielle :

$$\begin{aligned} e^{-v_n} &= e^K \times \exp\left(\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e^K \times \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

grâce au DL à l'ordre de la fonction exponentielle en 0.
En reportant dans (*) :

$$n! = e^K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ce résultat implique que : $n! \sim e^K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. En confrontant cet équivalent à la formule de Stirling, on constate que $e^K = \sqrt{2\pi}$.

Conclusion : On a prouvé le développement asymptotique :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Exercice 3

Autour de la série harmonique alternée

On étudie dans cet exercice la série harmonique alternée :

$$\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Tout au long de l'exercice, on notera $(S_n)_{n \geq 1}$ la suite des sommes partielles de cette série.

1) Démontrer que la série harmonique alternée est semi-convergente.

2) a. Pour tout entier $k \geq 1$, calculer $\int_0^1 t^{k-1} dt$.

b. En déduire que : $\forall n \geq 1, S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt$.

c. content

Justifier que : $\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

d. Retrouver que la série harmonique alternée est convergente, et préciser la valeur de sa somme.

À partir de maintenant, on note S la somme de la série harmonique alternée, et $(R_n)_{n \geq 1}$ la suite des restes de cette série.

On cherche à obtenir des développements asymptotiques de la suite des sommes partielles cette série.

3) Cette question ne nécessite pas de calculs compliqués.

a. Justifier que $R_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

b. En déduire le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite à termes strictement positifs, décroissante et qui tend vers 0. On suppose que la suite $(a_n - a_{n+1})_{n \geq 1}$ est décroissante et que $a_{n+1} \sim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

4) a. Montrer que $b_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$ est bien défini pour tout entier $n \geq 1$.

b. Étudier la monotonie de la suite $(|b_n|)_{n \geq 1}$.

c. Montrer que : $b_n \sim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{2}$.

Indication. On pourra encadrer $2|b_n|$ en utilisant la question précédente.

5) a. Déduire de ce qui précède un équivalent simple du reste de la série harmonique alternée.

b. En déduire la valeur de la constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$