

CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON 2 - SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1

1. Si $z = 0$ alors tous les termes étant nuls à partir du rang $n = 1$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (absolument, précision utile pour la suite).

Soit maintenant $z \neq 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{|z|^n}{n!} > 0$ et $\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1$, on en déduit par la règle de d'Alembert que la série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ converge.

Ainsi, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument donc converge.

On peut donc conclure :

pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge (absolument).

2. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

Les séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ convergent absolument d'après la question 1 donc par produit de Cauchy,

la série $\sum w_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$, converge absolument et on a :

$$f(z)f(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k z'^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z + z')^n = f(z + z')$$

d'après la formule du binôme de Newton.

Ainsi :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}, f(z + z') = f(z)f(z').$$

3.(a) On constate que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$.

★ Soit $x \in]0, 1[$.

On a $\frac{f(x) - 1}{x} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \geq 0$ comme somme de termes positifs donc $\frac{f(x) - 1}{x} \geq 1$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{(n+1)!} \leq 1$ donc $\frac{x^n}{(n+1)!} \leq x^n$ (car $x \geq 0$).

Comme les séries $\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $\sum x^n$ (série géométrique avec $|x| < 1$) convergent, on obtient par croissance de la somme :

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi :

$$\forall x \in]0, 1[, 1 \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$$

★ Soit $x \in]-1, 0[$.

On a $\frac{f(x) - 1}{x} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{(n+1)!}$ car $x \leq 0$.

La série $\sum (-1)^n \frac{|x|^n}{(n+1)!}$ est alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{|x|^n}{(n+1)!} \geq 0$.

Comme la suite $\left(\frac{|x|^n}{(n+1)!}\right)$ tend vers 0 (car $|x| < 1$) et est décroissante (car c'est le produit des suites $(|x|^n)$ et $\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$ qui sont décroissantes et positives), on obtient par le critère spécial des séries alternées que la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{(n+1)!}$ est du signe de son premier terme c'est-à-dire négatif.

Ainsi, $\frac{f(x)-1}{x} - 1 \leq 0$ donc $\frac{f(x)-1}{x} \leq 1$.

De même, on a $\frac{f(x)-1}{x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{|x|^n}{(n+1)!} \geq 0$ par le critère spécial des séries alternées.

On a donc :

$$\forall x \in]-1, 0[, 1 + \frac{x}{2} \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq 1.$$

3.(b) On remarque que $f(0) = 1$ donc $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ est le taux d'accroissement de f en 0.

On a pour tout $x \in]0, 1[, 1 \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-x} = 1$, par le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = 1$.

On a pour tout $x \in]-1, 0[, 1 + \frac{x}{2} \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{x}{2}\right) = 1$, par le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-1}{x} = 1$.

Par propriété des limites à droite et à gauche, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$.

Donc par définition :

$$\text{la fonction } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et vérifie } f'(0) = 1.$$

4.(a) Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a en appliquant la question 2 :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h} = f(x_0) \frac{f(h)-1}{h}.$$

4.(b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrons que f est dérivable en x_0 et qu'on a $f'(x_0) = f(x_0)$.

On a vu que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} = 1$ d'où par la question précédente : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Ceci prouve que la fonction f est dérivable en x_0 et qu'on a $f'(x_0) = f(x_0)$.

Ainsi :

$$\text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et elle vérifie } f' = f.$$

4.(c) La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' = y$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \lambda e^x$.

Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $\lambda = 1$.

Ainsi :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } f(x) = e^x.$$

5.(a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} - i = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} - 1}{x} - i = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} - i}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n x^{n-1}}{n!} - i = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n x^{n-1}}{n!} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{i^{m+1} x^m}{(m+1)!} = i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{(n+1)!}$$

par le changement d'indice $m = n - 1$.

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*, \frac{g(x)-g(0)}{x} - i = i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{(n+1)!}.$$

5.(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\left| \frac{g(x) - g(0)}{x} - i \right| = \left| i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{(n+1)!} \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{(n+1)!} \right|.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \left| \frac{i^n x^n}{(n+1)!} \right| = \frac{|x|^n}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^n}{n!}$ puisque $(n+1)! \geq n! > 0$ et $|x|^n \geq 0$.

Comme la série $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ converge (d'après la question 1), on en déduit par comparaison par inégalité que la série $\sum \frac{i^n x^n}{(n+1)!}$ converge absolument.

Par inégalité triangulaire puis croissance, on en déduit alors que :

$$\left| \frac{g(x) - g(0)}{x} - i \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{(n+1)!} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} - 1 = e^{|x|} - 1.$$

On a ainsi prouvé :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{g(x) - g(0)}{x} - i \right| \leq e^{|x|} - 1.$$

5.(c) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{|x|} - 1) = 0$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = i$$

ce qui signifie par définition que :

$$\text{la fonction } g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = i.$$

6.(a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ par la question 2 :

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{f(ix_0 + ih) - f(ix_0)}{h} = \frac{f(ix_0)f(ih) - f(ix_0)}{h} = g(x_0) \frac{g(h) - 1}{h}.$$

Or, on a vu que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - 1}{h} = i$ puisque $g(0) = 1$.

On en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = ig(x_0)$.

Ceci prouve que la fonction g est dérivable en x_0 et qu'on a $g'(x_0) = ig(x_0)$.

Ainsi :

$$\text{la fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et elle vérifie } g' = ig.$$

6.(b) La fonction g est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' = iy$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = \lambda e^{ix}$.

Comme $g(0) = 1$, on en déduit que $\lambda = 1$.

Ainsi :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } g(x) = f(ix) = e^{ix}.$$

7. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a par la question 2 :

$$f(z) = f(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) = f(\operatorname{Re}(z))f(i\operatorname{Im}(z)).$$

Comme $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ sont des réels, on obtient par les questions 4.(c) et 6.(b) que :

$$f(\operatorname{Re}(z)) = e^{\operatorname{Re}(z)} \text{ et } f(i\operatorname{Im}(z)) = e^{i\operatorname{Im}(z)}.$$

Ainsi :

$$f(z) = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)} = e^z.$$

On a donc prouvé que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Exercice 2 *Extrait Mines PC 2025*

1. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = (-1)^k \times \frac{1}{pk+q}$ avec $\frac{1}{pk+q} \geq 0$.

La série $\sum u_k$ est donc une série alternée.

De plus, la suite $\left(\frac{1}{pk+q}\right)_{k \geq 0}$ est décroissante ($p \geq 0$) et elle converge vers 0.

On en déduit par le théorème spécial des séries alternées que :

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-t)^k \right) dt \text{ car pour tout } t \in [0, 1], -t \neq 1 \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \phi_{1,1}(n). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\phi_{1,1}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.}$$

3. On a d'une part

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln|1+t|]_0^1 = \ln(2)$$

et d'autre part, on a par inégalité triangulaire puis croissance de l'intégrale :

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \right| dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = 0$.

On en déduit que

$$\boxed{S_{1,1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{1,1}(n) = \ln(2).}$$

4. Soit $q \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} S_{1,q} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+q} = \sum_{j=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-q+1}}{j+1} \text{ en posant } j = k + q - 1 \\ &= (-1)^{q+1} \sum_{j=q-1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} = (-1)^{q+1} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} - \sum_{j=0}^{q-2} \frac{(-1)^j}{j+1} \right) \\ &= (-1)^{q+1} (\ln(2) - \phi_{1,1}(q-2)), \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{S_{1,q} = (-1)^q (\phi_{1,1}(q-2) - \ln 2).}$$

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$S_{p,p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{pk+p} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{p} S_{1,1}$$

donc par la question 3 :

$$S_{p,p} = \frac{\ln(2)}{p}.$$

6. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $p < q$ et $p \mid q$.

Ainsi, il existe un entier ℓ tel que $q = \ell p$ et on a de plus $\ell \geq 2$.

On a :

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{pk+q} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\ell} = \frac{1}{p} S_{1,\ell} \\ &= \frac{(-1)^\ell}{p} (\phi_{1,1}(\ell-2) - \ln 2) \text{ d'après la question 4} \\ &= \frac{(-1)^{\ell+1}}{p} \left(\ln 2 - \sum_{k=0}^{\ell-2} \frac{(-1)^k}{k+1} \right) \\ &= \frac{(-1)^{\ell-1}}{p} \left(\ln 2 - \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \right) \text{ en posant } i = k+1 \end{aligned}$$

On a donc :

$$S_{p,q} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{p} \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \text{ avec } \lambda = \ell = \frac{q}{p}.$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq I_{p,q}(n) = \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx \leq \int_0^1 x^{(n+1)\alpha_{p,q}} dx = \frac{1}{(n+1)\alpha_{p,q}+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{p,q}(n) = 0.$$

8. Soit $x \in [0, 1]$. Comme $-x^{\alpha_{p,q}} \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^n (-x^{\alpha_{p,q}})^k = \frac{1 - (-x^{\alpha_{p,q}})^{n+1}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}}.$$

En intégrant l'égalité précédente entre 0 et 1, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k\alpha_{p,q}+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^{\alpha_{p,q}}} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{(n+1)\alpha_{p,q}}}{1+x^{\alpha_{p,q}}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^{\alpha_{p,q}}} + (-1)^n I_{p,q}(n).$$

Or,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k\alpha_{p,q}+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{kp/q+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k q}{kp+q} = q\phi_{p,q}(n).$$

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \left(\int_0^1 \frac{dx}{1+x^{\alpha_{p,q}}} + (-1)^n I_{p,q}(n) \right).$$

9. On déduit des deux questions précédentes que

$$S_{p,q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^{\alpha_{p,q}}} = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^{p/q}}.$$

Effectuons le changement de variables $t = x^{1/q}$ ou encore $x = t^q$. Comme $dx = qt^{q-1} dt$, il vient

$$S_{p,q} = \frac{1}{q} \int_0^1 \frac{qt^{q-1}}{1+t^p} dt.$$

Ainsi :

$$S_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1+t^p} dt.$$

10. On a par la question précédente :

$$S_{2,1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0)$$

donc

$$S_{2,1} = \frac{\pi}{4}.$$

11. Le polynôme $X^3 + 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et ses racines sont les racines 3-ièmes de -1. Ce sont donc les complexes

$$e^{i\pi/3}, e^{i2\pi/3} = e^{i(2k+1)\pi/3} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}$$

c'est-à-dire

$$e^{i\pi/3}, e^{i\pi} = -1 \text{ et } e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/3} = \overline{e^{i\pi/3}}.$$

En notant $\omega = e^{i\pi/3}$, la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{X^3+1}$ est donc de la forme :

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-\omega} + \frac{c}{X-\bar{\omega}},$$

où a , b et c sont des nombres complexes.

Or, on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\overline{1}}{x^3+1} = \frac{\bar{a}}{x+1} + \frac{\bar{b}}{x-\bar{\omega}} + \frac{\bar{c}}{x-\omega}.$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples, on en déduit que $a = \bar{a}$ c'est-à-dire $a \in \mathbb{R}$ et $c = \bar{b}$. On a donc :

$$\frac{1}{(X+1)(X-\omega)(X-\bar{\omega})} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-\omega} + \frac{\bar{b}}{X-\bar{\omega}}.$$

Déterminons a . En multipliant par $X+1$, on obtient :

$$\frac{1}{(X-\omega)(X-\bar{\omega})} = a + \frac{b(X+1)}{X-\omega} + \frac{\bar{b}(X+1)}{X-\bar{\omega}}.$$

En évaluant en -1 , on obtient :

$$a = \frac{1}{(1+\omega)(1+\bar{\omega})} = \frac{1}{1+2\operatorname{Re}(\omega)+|\omega|^2} = \frac{1}{1+2 \times \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3} \quad \text{car } \omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Déterminons b . En multipliant par $X-\omega$, on obtient :

$$\frac{1}{(X+1)(X-\bar{\omega})} = \frac{a(X-\omega)}{X+1} + b + \frac{\bar{b}(X-\omega)}{X-\bar{\omega}}.$$

En évaluant en ω , on obtient :

$$b = \frac{1}{(\omega+1)(\omega-\bar{\omega})} = \frac{1}{(\omega+1) \times 2i\operatorname{Im}(\omega)} = \frac{1}{e^{i\pi/6}(e^{i\pi/6} + e^{-i\pi/6})} \times \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{e^{-i\pi/6}}{2\cos(\pi/6)} \times \frac{e^{-i\pi/2}}{\sqrt{3}} = \frac{e^{-i2\pi/3}}{3}.$$

Ainsi :

$$\text{on a la forme souhaitée avec } a = \frac{1}{3}, b = \frac{e^{-i2\pi/3}}{3} = -\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ et } \omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

12. On a :

$$\frac{b}{X-\omega} + \frac{\bar{b}}{X-\bar{\omega}} = \frac{b(X-\bar{\omega}) + \bar{b}(X-\omega)}{(X-\omega)(X-\bar{\omega})} = \frac{2\operatorname{Re}(b)X - 2\operatorname{Re}(b\bar{\omega})}{X^2 - 2\operatorname{Re}(\omega)X + |\omega|^2} = \frac{-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}}{X^2 - X + 1}.$$

On en déduit la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^3+1}$ dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{X+1} + \frac{-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}}{X^2 - X + 1}.$$

13. Par la question 9., on a :

$$S_{3,1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{t-2}{t^2-t+1} dt.$$

On a déjà :

$$\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = [\ln|t+1|]_0^1 = \ln(2).$$

On a également :

$$\int_0^1 \frac{t-2}{t^2-t+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt - \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt.$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt = [\ln|t^2-t+1|]_0^1 = \ln 1 - \ln 1 = 0$$

et

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt = \int_0^1 \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{3}(t-\frac{1}{2})^2 + 1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1} dt$$

donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

On en déduit que :

$$S_{3,1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$