

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Cours (Première partie)

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

I. NORME

A. DÉFINITION D'UNE NORME

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle *norme sur E* toute application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- * $\forall u \in E, \|u\| \geq 0$
- * *Séparation* : $\forall u \in E, [\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0_E]$
- * *Homogénéité* : $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
- * *Inégalité triangulaire* : $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Pour $u \in E$, on dit que $\|u\|$ est la *norme de u* .

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est appelé *espace vectoriel normé*.

Exemple : La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$ et le module est une norme sur $\mathbb{C}$.
Ainsi, $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est un espace vectoriel normé.

Notons les conséquences suivantes :

- On a $\|0_E\| = 0$.
- Pour tout $u \in E$, on a $\|-u\| = \|u\|$.
- Un vecteur est dit *unitaire* ou *normé* lorsque sa norme est égale à 1.
Si $u \in E$ avec $u \neq 0_E$ alors $\frac{u}{\|u\|}$ est un vecteur unitaire.
- *Généralisation de l'inégalité triangulaire* :
On a pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, $\left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|u_i\|$.

Proposition 2 (Seconde inégalité triangulaire)

On a pour tout $(u, v) \in E^2$:

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|.$$

Proposition 3 (*Norme euclidienne*)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel c'est-à-dire un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Pour tout $u \in E$, on pose $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

On définit ainsi une norme appelée *norme euclidienne* associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exemples :

- $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) muni du produit scalaire canonique :

$$\forall (U, V) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \langle U, V \rangle = U^\top V = \sum_{i=1}^n u_i v_i \text{ en notant } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

La norme euclidienne associée est définie par :

$$\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|U\| = \sqrt{U^\top U} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \text{ en notant } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

- $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$) muni du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}))^2, \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

La norme euclidienne associée est définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}.$$

Proposition 4 (*Normes sur $\mathbb{K}^n$*)

- Pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i|$.

On définit ainsi une norme appelée *la norme 1*.

- Pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i|^2}$.

On définit ainsi une norme appelée *la norme 2*.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique.

- Pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$.

On définit ainsi une norme appelée *la norme infinie*.

Proposition 5 (*Norme infinie sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$*)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide.

On note $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.

Pour tout $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on pose $\|f\|_\infty^I = \sup_{t \in I} |f(t)|$.

On définit ainsi une norme appelée *la norme infinie* ou *la norme de la convergence uniforme*.

Utile : Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et k est un réel positif alors $\sup(kA) = k\sup(A)$.

C. DISTANCE ASSOCIÉE À UNE NORME

Définition 6

On appelle *distance sur E* toute application d de E^2 dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- * $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) \geq 0$
- * *Séparation* : $\forall (u, v) \in E^2, [d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v]$
- * *Symétrie* : $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) = d(v, u)$
- * *Inégalité triangulaire* : $\forall (u, v, w) \in E^3, d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Proposition 7

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

L'application $d : \begin{matrix} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \|v - u\| \end{matrix}$ est une distance sur E .

On dit que d est la *distance associée à la norme $\|\cdot\|$* .

D. NORMES ÉQUIVALENTES

Définition 8

Deux normes N_1 et N_2 définies sur E sont dites *équivalentes* lorsqu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :

$$\forall u \in E, \alpha N_2(u) \leq N_1(u) \leq \beta N_2(u).$$

- On notera que cette notion est indépendante de l'ordre des normes.
- Si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes et les normes N_2 et N_3 sont équivalentes alors les normes N_1 et N_3 sont équivalentes.

Exemple 1 : Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

Exemple 2 : On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \alpha \|f\|_\infty$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto t^n$.

En utilisant la suite de fonctions (f_n) , montrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite (u_n) de vecteurs non nuls de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} = 0$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} = +\infty$.

Théorème 9

Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors toutes les normes définies sur E sont équivalentes.

Ce n'est pas le cas lorsque l'espace vectoriel n'est pas de dimension finie (*cf exemple 2*).

II. SUITES VECTORIELLES

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

On s'intéresse dans ce paragraphe aux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E, \|\cdot\|)$ c'est-à-dire telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un vecteur de E .

A. SUITES BORNÉES

Définition 10

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *bornée pour la norme $\|\cdot\|$* lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|u_n\| \leq r$.

On notera que la notion de suite bornée dépend de la norme.

Cependant, si deux normes sont équivalentes alors toute suite bornée pour l'une est bornée pour l'autre. Ainsi, lorsque E est de dimension finie, la notion de suite bornée ne dépend pas de la norme utilisée.

B. SUITES CONVERGENTES/DIVERGENTES

1. DÉFINITION

Définition 11

- Soit $\ell \in E$. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers ℓ pour la norme $\|\cdot\|$* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geq n_0, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

- Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

- Dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, on retrouve les notions connues.
- On notera que ces notions dépendent de la norme.
Cependant, si deux normes sont équivalentes alors toute suite convergente pour l'une est convergente l'autre, avec la même limite.

- Illustration graphique dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

Proposition 12

On a l'équivalence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\|u_n - \ell\|}_{\text{suite réelle}} = 0$$

Exemple 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall t \in [0, 1], f_n(t) = t^{1/n}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction constante égale à 1 dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.
2. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle vers la fonction constante égale à 1 dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$?

Exemple 4 : Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$.

2. PROPRIÉTÉS

Proposition 13

- Lorsqu'elle existe, la limite est unique.
- Toute suite convergente est bornée.
- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, converge vers ℓ .

Proposition 14 (Opérations sur les limites)

- Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \ell_1 + \ell_2$.
On en déduit que l'ensemble des suites convergentes de E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E converge vers ℓ et la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge vers λ alors la suite $(\lambda_n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \ell$.

3. CAS DE LA DIMENSION FINIE

Lorsque E est de dimension finie, la notion de suite convergente et la valeur de sa limite le cas échéant ne dépendent pas de la norme utilisée.

Proposition 15 (*Suites de coordonnées*)

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_{n,1}, \dots, u_{n,p}$ les coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}$. Soit $\ell \in E$. On note $\ell_1, \dots, \ell_p$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathcal{B}$. On a l'équivalence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k} = \ell_k.$$

En d'autres termes, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E si et seulement si toutes ses suites de coordonnées convergent dans $\mathbb{K}$.

On a dans ce cas : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sum_{k=1}^p \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k} \right) e_k$.

Exemple 5 :

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(n \sin(1/n), (1 + 1/n)^n \right).$$

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_N[X]$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \sum_{k=0}^N \frac{k}{n} X^k.$$

3. (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1 & -\frac{1}{n} \\ 2 + \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & 2 \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -1 \end{pmatrix}$.
 (b) Montrer que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ convergeant respectivement vers A et B alors la suite $(A_n B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers AB .