

## Exercices

**Exercice 1.** Bolzano-Weierstrass avec vue sur la mer.

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle bornée.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on dit que  $n$  a vue sur la mer lorsque :

$$\forall p \geq n : u_p \leq u_n$$

On note  $A$  l'ensemble des entiers qui ont vue sur la mer.

1. On suppose dans cette question que  $A$  est infini.  
Montrer qu'il existe une suite extraite de  $u$  qui est décroissante.
2. On suppose à présent que l'ensemble  $A$  est fini.  
Montrer qu'il existe une suite extraite de  $u$  qui est croissante.
3. Conclure.

**Exercice 2.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Montrer que toute sphère  $S(a, r)$  est génératrice de  $E$ .

**Exercice 3.** On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Montrer que le carré  $]0; 1[ \times ]0; 1[$  de  $\mathbb{R}^2$  est ouvert.

Même question avec la norme  $\|\cdot\|_1$ .

**Exercice 4.** Soit  $\ell^\infty(\mathbb{K})$  l'ensemble des suites de  $\mathbb{K}^\mathbb{N}$  bornées et

$$\ell^1(\mathbb{K}) = \left\{ u \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sum u_n \text{ converge absolument} \right\}.$$

1. Montrer que  $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$  définit une norme sur  $\ell^1(\mathbb{K})$ .
2. Montrer que  $\ell^1(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$  et comparer les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  sur  $\ell^1(\mathbb{K})$ . Ces normes sont-elles équivalentes ?

**Exercice 5.** Soit  $U$  un ouvert et  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Montrer que  $A + U$  est ouvert.

**Exercice 6.** Soit  $A$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  et soit  $x = \sup(A)$ . Montrer que  $x$  est adhérent à  $A$ .

**Exercice 7.** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$  qui converge vers  $\ell \in E$ . Montrer que  $\{x_n; \text{ avec } n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$  est un fermé.

**Exercice 8.** Soit  $A$  et  $B$  des parties d'un espace vectoriel normé  $E$ .

1. Montrer que  $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$  et  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .
2. Comparer  $\overline{A \cap B}$  et  $\overline{A} \cap \overline{B}$ ,  $\overline{A \cup B}$  et  $\overline{A} \cup \overline{B}$ ,  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$  et  $\overset{\circ}{A \cap B}$  et enfin  $\overset{\circ}{A \cup B}$  et  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ .
3. Montrer que  $\overset{\circ}{A} = A \setminus fr(A)$  et  $\overline{A} = A \cup fr(A)$ .

**Exercice 9.** Soit  $A$  une partie non vide d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ . Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0.$$

**Exercice 10.**

1. Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que, si  $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ , alors  $F = E$ .
2. On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $E_1$  (resp.  $P$ ) la partie de  $E$  formée des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  (resp. polynomiales). Montrer que :  $\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{P} = \emptyset$ .

## Banque CCINP

**Exercice 11 (CCINP 34).** Soit  $A$  une partie non vide d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé  $E$ .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à  $A$ , en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que :  $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que,  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .
3. Démontrer que, si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\overline{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
4. Soient  $B$  une autre partie non vide de  $E$ . Montrer que  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ .

**Exercice 12 (CCINP 45).**

**Les questions 1. et 2. sont indépendantes.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On note  $\|\cdot\|$  la norme sur  $E$ .

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ .

On note  $\overline{A}$  l'adhérence de  $A$ .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de  $\overline{A}$ .  
(b) Prouver que, si  $A$  est convexe, alors  $\overline{A}$  est convexe.
2. On pose :  $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ .  
(a) Soit  $x \in E$ . Prouver que  $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$ .  
(b) On suppose que  $A$  est fermée et que :  $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1 - t)y) \leq td_A(x) + (1 - t)d_A(y)$ .  
Prouver que  $A$  est convexe.