

DM2 - Etude de fonction, bijections

2025-2026



Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminez son ensemble de définition, son domaine de dérivabilité et calculez sa dérivée.
2. Donnez le tableau de variation de f , complété par les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Que déduire de ces limites ?
3. Donnez l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$.
4. Montrez que $g : x \mapsto f(x) - 1$ est une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$ en terme de symétrie ?
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ en faisant apparaître les éléments repérés dans l'étude précédente.
6. Montrez que f est une bijection de l'ensemble $[-1, 1]$ vers un ensemble que vous préciserez.

1. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, on a $x^2 + 1 > 0$ et donc $x^2 + 1 \neq 0$, ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.
En outre, par quotient de fonctions dérivables, elle est dérivable et on a

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - (x^2+2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 2 \times \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

2. $f'(x)$ est du signe de $1-x^2$, dont les racines sont 1 et -1 .
De plus, pour $x \neq 0$ on peut écrire

$$f(x) = \frac{\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}{1+\frac{1}{x^2}}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

En conséquence, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

Voici le tableau de variation de f , où on a ajouté la valeur en 0 en anticipation de la question 3 :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$			
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

3. La fonction f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 2$, d'où l'équation de la tangente :

$$y = 2x + 1$$

4. Simplifions déjà l'expression de $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - 1 = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1 \\ &= \frac{x^2+2x+1-x^2-1}{x^2+1} \\ &= \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

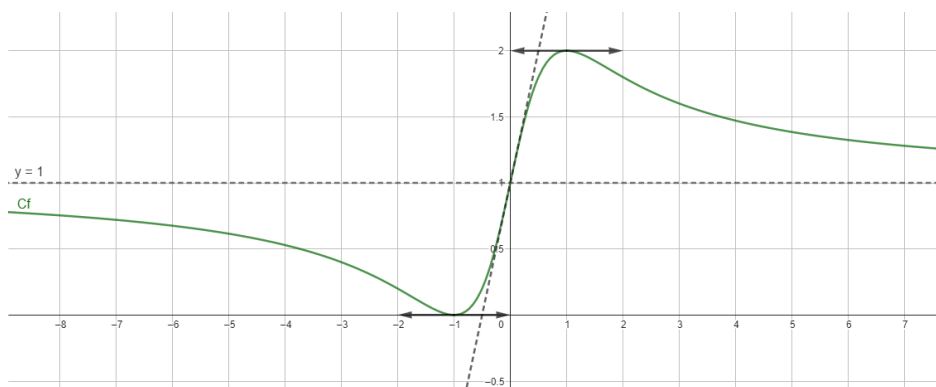
On a alors simplement $g(-x) = \frac{-2x+1}{(-x)^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -g(x)$

Donc g est impaire.

On en déduit que la courbe de g , $\mathcal{C}_g$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, 0)$.
Comme $f(x) = g(x) + 1$, on obtient $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur $(0, 1)$ (on "monte" d'une unité).

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, 1)$.

5. Voici un tracé de $\mathcal{C}_f$, via geogebra. On n'attend évidemment pas un dessin précis, mais on veut les tangentes (horizontale et à l'origine) et les asymptotes.



6. Comme pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) > 0$, on en déduit que f est strictement croissante sur $[-1, 1]$.

Elle constitue donc une bijection de $[-1, 1]$ vers $f([-1, 1])$. D'après l'étude précédente, et comme f est continue sur $[-1, 1]$, on a $f([-1, 1]) = [0, 2]$.

Ainsi, $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$ est une bijection.



Exercice 2 :

Soient a et b deux réels et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = ax + b + |x|$$

- Justifiez que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculez $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.
 - Déterminez une ou des conditions nécessaires et suffisantes sur a et b pour que la fonction f soit strictement monotone.
 - On suppose cette (ou ces) condition(s) sont remplie(s). Montrez que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de même pour $x \mapsto ax + b$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par somme de fonctions dérivables. Si $x > 0$, on a $f(x) = ax + b + x$ d'où $f'(x) = a + 1$ et si $x < 0$, on obtient $f'(x) = a - 1$.
2. D'après l'expression de la dérivée, pour que f soit strictement monotone sur $\mathbb{R}$, il faut et il suffit donc que $a + 1$ et $a - 1$ soient strictement positifs, c'est à dire dire $a > 1$, ou bien $a + 1$ et $a - 1$ strictement négatifs, c'est à dire $a < -1$. Il n'y a pas de condition sur b . Conclusion

f est strictement monotone si et seulement si $|a| > 1$

3. Si $|a| > 1$, f est strictement monotone, donc f est injective.
- Il s'agit maintenant de déterminer $f(\mathbb{R})$ pour appliquer le théorème de la limite monotone. Comme f est strictement monotone et continue, il suffit de regarder les limites en $+\infty$ et $-\infty$. Comme $|a| > 1$, on a donc deux cas à étudier.

Si $a > 1$:

En $+\infty$, donc pour $x > 0$, on a $f(x) = (a + 1)x + b$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $a + 1 > 0$.

En $-\infty$, donc pour $x < 0$, on a $f(x) = (a - 1)x + b$ et comme $a - 1 > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Ainsi, si $a > 1$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

D'après le théorème de la bijection monotone, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

De même, si $a < -1$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, donc à nouveau $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans les deux cas, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.