

*Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .*

*Quelle est la définition du noyau de  $f$  ? de l'image de  $f$  ?*

*Quel résultat permet de relier leurs dimensions ?*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .*

*Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un vecteur de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .*

*Exprimer à l'aide des coefficients  $\text{tr}(A^\top B)$  et l'égalité  $AX = \lambda X$ .*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ .*

*Quelle est la définition du noyau de  $A$  ? de l'image de  $A$  ?*

*Comment peut-on les déterminer ?*

*Quel résultat permet de relier leurs dimensions ?*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

★ *Noyau de  $f$*  :  $\text{Ker}(f) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$ .  
 En d'autres termes :  $u \in \text{Ker}(f) \iff f(u) = 0_F$ .

$\text{Ker}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

★ *Image de  $f$*  :  $\text{Im}(f) = \{f(u); u \in E\}$ .  
 En d'autres termes :  $v \in \text{Im}(f) \iff \exists u \in E$  tel que  $v = f(u)$ .  
 *$v$  appartient à l'image de  $f$  si et seulement si  $v = f(\text{qqchose})$*

$\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

★ *Théorème du rang* : Si  $E$  est de dimension finie alors

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_{=\text{rg}(f)} = \dim(E).$$

Pour une matrice  $M$ , on note  $[M]_{i,j}$  son coefficient d'indice  $(i, j)$ .

$$\star \text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^n [A^T B]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [A^T]_{i,j} [B]_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} b_{j,i}.$$

★ On a les équivalences :

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff \forall i \in [[1, n]], [AX]_{i,1} = [\lambda X]_{i,1} \\ &\iff \forall i \in [[1, n]], \sum_{j=1}^n [A]_{i,j} [X]_{j,1} = \lambda [X]_{i,1} \\ &\iff \forall i \in [[1, n]], \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i. \end{aligned}$$

★ *Noyau de  $A$*  :  $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}), AX = 0_{p,1}\}$ .

*Pour le déterminer* : résolution du système linéaire homogène obtenu en posant  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \hookrightarrow$  *méthode du pivot de Gauss*.

★ *Image de  $A$*  :  $\text{Im}(A) = \{AX; X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})\}$ .

*Pour la déterminer* :  $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_q)$  où  $C_1, \dots, C_q$  sont les colonnes de  $A$ .

★ Si on note  $\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{cases}$  alors  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(\varphi_A)$  et  $\text{Im}(A) = \text{Im}(\varphi_A)$ . En appliquant le théorème du rang à  $\varphi_A$ , on obtient :

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \underbrace{\dim(\text{Im}(A))}_{=\text{rg}(A)} = q.$$

$\hookrightarrow$  Connaissant  $\text{Im}(A)$ , il est possible de déterminer la dimension de  $\text{Ker}(A)$  puis d'en déduire une base de  $\text{Ker}(A)$ .

*Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .*

*Donner la définition de l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$   
canoniquement associé à  $A$  puis de l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$   
canoniquement associé à  $A$ .*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Rappeler les propriétés de calcul du déterminant d'une matrice  
carrée.*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Quelle est la définition du déterminant de Vandermonde ?*

*Quelle est sa valeur ?*

*Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice  
apparaissant dans le déterminant de Vandermonde soit inversible.*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

★ Endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  canoniquement associé à  $A$  :

$$\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto AX \end{cases}$$

C'est l'unique endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  ayant pour matrice  $A$  dans la

base canonique  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

★ Endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $A$  :

c'est l'unique endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  ayant pour matrice  $A$  dans la base canonique  $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1))$ .

(Pas d'expression explicite, on utilise les relations vectoriel/matriciel pour l'obtenir explicitement.)

★ Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ , soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ ,
- $\det(A^T) = \det(A)$ ,
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$  (par linéarité par rapport à chaque colonne),
- en général,  $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$  (mais linéarité par rapport à chaque colonne)
- $A$  est inversible ssi  $\det(A) \neq 0$  et dans ce cas,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

★ Conséquences des opérations sur les lignes (idem sur les colonnes) :

- échange de deux lignes : le déterminant est multiplié par -1,
- ajout à une ligne d'une combinaison linéaire d'autres lignes : inchangé,
- multiplication d'une ligne par  $\alpha$  : le déterminant est multiplié par  $\alpha$ .

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ .

★ Déterminant de Vandermonde du  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

★ La matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, c'est-à-dire si et seulement si les  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont deux à deux distincts.

*Quelle est la définition des polynômes interpolateurs de Lagrange  $L_1, \dots, L_n$  associés à  $a_1, \dots, a_n$  ?*

*Rappeler leur degré, leur coefficient dominant et leur valeur quand on les évalue en  $a_1, \dots, a_n$ .*

*Que peut-on dire de la famille  $(L_1, \dots, L_n)$  ?*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Quelle est la définition de l'assertion les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables ?*

*Comment peut-on prouver que deux matrices données sont semblables ?*

*Comment peut-on prouver qu'elles ne sont pas semblables ?*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Comment peut-on caractériser matriciellement un sous-espace stable par un endomorphisme  $f$  ? des sous-espaces supplémentaires stables par  $f$  ?*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Soit  $a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $\mathbb{K}$  **deux à deux distincts**.

\* *Polynômes d'interpolation de Lagrange* :  $\forall i \in [[1, n]]$ ,  $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ .

\* Ce sont tous des polynômes de degré  $n - 1$ , de coefficient dominant  $\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}$ , qui vérifient pour tout  $j \neq i$ ,  $L_i(a_j) = 0$  et  $L_i(a_i) = 1$ .

\* La famille  $(L_1, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ .

\*  $A$  et  $B$  sont dites *semblables* lorsqu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $A = PBP^{-1}$ .

\* Pour prouver que deux matrices  $A$  et  $B$  sont semblables, on peut montrer qu'elles représentent un même endomorphisme dans deux bases. On peut par exemple considérer l'endomorphisme  $\varphi$  canoniquement associé à la matrice  $A$  et chercher (*par analyse-synthèse*) une base dans laquelle  $\varphi$  a pour matrice  $B$ .

\* Si deux matrices n'ont pas la même trace, ou pas le même rang, ou pas le même déterminant, alors elles ne sont pas semblables. Mais attention, deux matrices qui ont même trace, même rang et même déterminant, ne sont pas nécessairement semblables.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

\* Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  adaptée au sous-espace  $F$  (de dimension  $d$ ). On a l'équivalence :

$F$  est stable par  $f$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array} \right)$ ,  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ .

\* Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ . On a l'équivalence :

tous les  $F_i$  sont stables par  $f$  ssi  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & (0) & \cdots & (0) \\ \hline (0) & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ \hline (0) & \cdots & (0) & A_p \end{array} \right)$ .

*Donner la définition d'un sous-espace stable, d'un endomorphisme induit.*

*Donner des exemples de sous-espaces stables par un endomorphisme  $f$ .*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Donner la définition de la trace d'une matrice carrée et rappeler ses propriétés calculatoires.*

*Quelle est la dimension de  $\ker(\text{tr})$  ?*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Soit  $a_1, \dots, a_n$  des réels deux à deux distincts et  $L_1, \dots, L_n$  les polynômes d'interpolation de Lagrange associés.*

*★ Soit  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Quelle est la matrice-colonne des coordonnées de  $P$  dans la base  $(L_1, \dots, L_n)$  ?*

*Quelle est la matrice de passage de la base  $(L_1, \dots, L_n)$  à la base canonique de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  ? Quel est son déterminant ?*

*★ Soit  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ .*

*Donner l'expression de l'unique polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  vérifiant pour tout  $k \in [[1, n]]$ ,  $P(a_k) = b_k$ .*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

★ On dit que  $F$  est *stable* par  $f$  lorsque pour tout  $u \in F$ ,  $f(u) \in F$ .

★ Lorsque  $F$  est stable par  $f$ , on appelle *endomorphisme induit par  $f$  sur  $F$*  l'endomorphisme de  $F$  défini par :  $\forall u \in F$ ,  $f_F(u) = f(u)$ .

★  $\{0_E\}$  et  $E$  sont stables par  $f$ .

Si  $f$  commute avec  $g$  alors  $\text{Ker}(g)$  est stable par  $f$ .

En particulier,  $\text{Ker}(f)$  est stable par  $f$  et plus généralement, pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\text{Ker}(P(f))$  est stable par  $f$ .

*N.B. : On a le même résultat avec l'image.*

★ Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

La *trace* de  $A$  est la somme de ses coefficients diagonaux c'est-à-dire

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

★ Pour  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$  et  $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{K})^2$ , on a :

- $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$  (*linéarité*),
- $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ ,
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  (*aussi valable pour  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$* ).

★ En tant que noyau d'une forme linéaire non nulle ( $\text{tr}(I_n) = n \neq 0$ ),  $\text{ker}(tr)$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  donc  $\dim(\text{ker}(tr)) = n^2 - 1$ .

★ En notant  $\mathcal{B} = (L_1, \dots, L_n)$ , on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$  car  $P = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i$ .

Notons  $\mathcal{C}$  la base canonique. On a :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(1, X, \dots, X^{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a  $\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}) = \det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^T) = V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ .

★ Le polynôme recherché est  $P = \sum_{i=1}^n b_i L_i$ .

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.  
Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

Soit  $u \in E$ . Quelle est la définition de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  ?

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Quelle est la définition de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  ?

Qu'obtient-on en calculant le produit  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  ?  
Comment obtient-on  $f(u)$  ?

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.  
Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  deux bases de  $E$ .

Quelle est la définition de la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  ?  
Quel est le lien avec la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$  ?

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Quelle relation relie  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$  ?

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit  $F_1, \dots, F_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Donner la définition de :

la somme  $\sum_{i=1}^p F_i$

la somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est directe

$F_1, \dots, F_p$  sont supplémentaires de  $E$

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

★  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est le vecteur-colonne des coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

★  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  est la matrice carrée de  $f$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .  
Sa  $j$ -ème colonne contient les coordonnées de  $f(e_j)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

★ On obtient le vecteur-colonne des coordonnées de  $f(u)$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u)).$$

Si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  alors  $f(u) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

★ Par définition, la *matrice de passage* de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  est la matrice  $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ .  
Ses colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{C}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

★ Toute matrice de passage est inversible et on a  $(P_{\mathcal{B},\mathcal{C}})^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ .

★ *Relation de changement de base :*

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) (P_{\mathcal{B},\mathcal{C}})^{-1}.$$

★ C'est le sev de  $E$  défini par  $\sum_{i=1}^p F_i = \left\{ \sum_{i=1}^p u_i; (u_1, \dots, u_p) \in \prod_{i=1}^p F_i \right\}$ .

En d'autres termes :

$$w \in \sum_{i=1}^p F_i \Leftrightarrow w \text{ s'écrit } w = \sum_{i=1}^p u_i \text{ avec pour tout } i \in [[1, p]], u_i \in F_i.$$

★ La somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est dite *directe* lorsque pour tout  $w \in \sum_{i=1}^p F_i$ , il existe un

**unique**  $p$ -uplet  $(u_1, \dots, u_p) \in \prod_{i=1}^p F_i$  tel que  $w = \sum_{i=1}^p u_i$ . *Notation :*  $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

★  $F_1, \dots, F_p$  sont dit *supplémentaires dans*  $E$  lorsque  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

En d'autres termes, c'est lorsque tout élément  $w$  de  $E$  peut s'écrire de manière

unique sous la forme  $w = \sum_{i=1}^p u_i$  avec pour tout  $i \in [[1, p]], u_i \in F_i$ .

*Énoncer le résultat permettant de calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Comment fait-on pour déterminer la trace ou le déterminant d'un endomorphisme ?*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Donner une caractérisation de la somme directe dans le cas de deux sous-espaces vectoriels puis dans le cas d'un nombre quelconque de sous-espaces.*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Si  $A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \hline 0 & \cdots & 0 & A_p \end{array} \right)$  est une matrice triangulaire par blocs telle que

pour tout  $k \in [[1, p]]$ ,  $A_k$  est une matrice carrée, alors  $\det(A) = \prod_{k=1}^p \det(A_k)$ .

Par définition, la trace (respectivement le déterminant) d'un endomorphisme est la trace (resp. le déterminant) de n'importe quelle matrice le représentant dans une base.

Ainsi, on commence par déterminer la matrice de l'endomorphisme dans une base bien choisie (base canonique, base adaptée à un sous-espace, base adaptée à une décomposition... ce qui paraît le plus pertinent) et il suffit ensuite de calculer la trace (resp. le déterminant) de la matrice obtenue.

*N.B. : Cette méthode fonctionne aussi pour déterminer le rang d'un endomorphisme.*

★ *Uniquement dans le cas de **deux** sous-espaces vectoriels :*

$F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{0_E\}$ .

★ *Cas général :*

La somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est directe si et seulement si :

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in \prod_{i=1}^p F_i, \quad \left( \sum_{i=1}^p u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [[1, p]], u_i = 0_E \right).$$

En d'autres termes, la somme est directe si et seulement s'il y a unicité d'écriture pour le vecteur nul.

*On suppose que les espaces vectoriels considérés sont tous de dimension finie.*

*Que pouvez-vous dire de la dimension des espaces vectoriels :*

$$\prod_{i=1}^p F_i \text{ et } \sum_{i=1}^p F_i \text{ ?}$$

*On pensera à préciser le cas particulier  $p = 2$  et le cas de la somme directe.*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Proposer trois méthodes pour prouver que des sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_p$  sont supplémentaires dans  $E$ .*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Qu'est-ce qu'une base adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$  ?*

*Qu'est-ce qu'une base adaptée à un sous-espace vectoriel  $F$  ?*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

★  $\dim\left(\prod_{i=1}^p F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i).$

★ Cas  $p = 2$  : Formule de Grassmann

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2).$$

★ Cas général :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

★ Méthode 1 :

Soit  $w \in E$ . On souhaite montrer qu'il existe un unique  $p$ -uplet de vecteurs

$$(u_1, \dots, u_p) \in \prod_{i=1}^p F_i \text{ tel que } w = \sum_{i=1}^p u_i.$$

On peut pour cela raisonner par *analyse-synthèse*.

★ Méthode 2 : sous l'hypothèse que  $E$  est de dimension finie

On commence par établir que  $\dim(E) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$  et on ajoute un deuxième

argument au choix parmi :  $E = \sum_{i=1}^p F_i$  ou la somme  $\sum_{i=1}^p F_i$  est directe.

★ Méthode 3 : sous l'hypothèse que  $E$  est de dimension finie

On concatène une base de  $F_1$ , une base de  $F_2$ , ..., une base de  $F_p$  et on montre que la famille obtenue est une base de  $E$ .

*Bonus* : On rappelle que toute droite non contenue dans un hyperplan est un supplémentaire de cet hyperplan.

★ Base adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$  : c'est une base de  $E$  telle que les premiers vecteurs forment une base de  $F_1$ , les suivants une base de  $F_2$ , etc., les derniers une base de  $F_p$ .

★ Base adaptée à un sous-espace vectoriel  $F$  : c'est une base de  $E$  telle que les premiers vecteurs forment une base de  $F$  (les suivants formeront alors une base d'un supplémentaire de  $F$  dans  $E$ ).

*Quelle est la définition d'un projecteur ? d'une symétrie ?*

*En donner une caractérisation, rappeler les liens entre deux projecteurs associés puis entre projecteur et symétrie.*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Quelle est la définition d'un polynôme annulateur de  $A$  ?*

*Donner un polynôme annulateur de la matrice diagonale*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

*Donner un polynôme annulateur d'une projection, d'une symétrie.*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

*Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $u \in E$ .  
Quel sens faut-il donner à  $P(f)(u)$  ?*

*Rappeler les propriétés de calculs avec les polynômes d'endomorphismes, et préciser ce que donnent les égalités évaluées en  $u$ .*

*Quelle propriété vérifient les polynômes en un endomorphisme  $f$  ?*

COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

★ *Hypothèse* :  $E = F \oplus G$

$$\begin{array}{lcl}
 E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\
 \text{Projecteur sur } F \text{ parallèlement à } G : p : w = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in G} & \longmapsto & u \\
 E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\
 \text{Symétrie par rapport à } F \text{ parallèlement à } G : s : w = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in G} & \longmapsto & u - v
 \end{array}$$

★ *Caractérisation* :

$p$  est un projecteur de  $E$  si et seulement si  $p \in \mathcal{L}(E)$  et  $p \circ p = p$ .

$\hookrightarrow p$  est la projection sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ .

$s$  est une symétrie de  $E$  si et seulement si  $s \in \mathcal{L}(E)$  et  $s \circ s = \text{Id}_E$ .

$\hookrightarrow s$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  parallèlement à  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ .

★ Si  $p$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  alors  $\text{Id}_E - p$  est la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$  et  $2p - \text{Id}_E$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

★ *Polynôme annulateur de  $A$*  : c'est un polynôme  $P$  qui vérifie  $P(A) = 0_n$ .

★ Notons  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Alors pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P(A) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$ .

Ainsi,  $\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$  est un polynôme annulateur de  $A$ . On a  $\prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I_n) = 0_n$ .

★  $X^2 - X$  est un polynôme annulateur d'une projection  $p$  car  $p^2 = p$ .

$X^2 - 1$  est un polynôme annulateur d'une symétrie  $s$  car  $s^2 = \text{Id}_E$ .

★ Par définition,  $P(f) \in \mathcal{L}(E)$  et donc  $P(f)(u) = [P(f)](u)$  est un vecteur de  $E$ , c'est l'évaluation de l'endomorphisme  $P(f)$  en  $u$ .

★ Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ . Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ .

On a :

$$(\alpha P + \beta Q)(f) = \alpha P(f) + \beta Q(f) \text{ et } (PQ)(f) = P(f) \circ Q(f).$$

Ce qui donne évalué en  $u \in E$  :

$$(\alpha P + \beta Q)(f)(u) = \alpha P(f)(u) + \beta Q(f)(u)$$

$$\text{et } (PQ)(f)(u) = [P(f) \circ Q(f)](u) = P(f)(Q(f)(u)).$$

★  $P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f) = (QP)(f) = Q(f) \circ P(f)$

$\hookrightarrow$  Deux polynômes en  $f$  commutent.