
SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Exercices

1 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, 1]$, $f_n(x) = nx^n \ln x$ et $f_n(0) = 0$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f à déterminer.
 2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
 3. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, a]$ pour tout $a \in]0, 1[$.
-

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = e^{-nx^n}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f que l'on donnera.
 2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
 3. Montrer que la convergence est uniforme sur $[1, +\infty[$ et sur $[0, a]$ pour tout $a \in]0, 1[$.
-

3 Étudier la convergence simple sur I , uniforme sur I puis uniforme sur tout segment inclus dans I de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- | | |
|--|--|
| 1. $f_n : x \mapsto \frac{nx^2}{1+nx}, I = \mathbb{R}_+$ | 4. $f_n : x \mapsto \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -nx + 2 & \text{si } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}, I = [0, 1]$ |
| 2. $f_n : x \mapsto \min\left(n, \frac{x^2}{n}\right), I = \mathbb{R}$ | |
| 3. $f_n : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right), I = \mathbb{R}_+^*$ | |
| | 5. $f_n : x \mapsto \arctan\left(\frac{n+x}{1+nx}\right), I = \mathbb{R}_+^*$ |
-

4 Étudier selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto n^\alpha x e^{-nx}$.

5 Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}, n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n$. La convergence est-elle uniforme ?
 3. Montrer que pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur la demi-droite $[a, +\infty[$.
-

6 On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_1(x) = \sin x, \quad \forall n \geq 2, u_n(x) = \sin u_{n-1}(x).$$

Montrer que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

7 Soit h une application continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto h(x)(\cos x)^n$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $a > 0$.
3. *Cas particulier 1* : On suppose dans cette question que $h : x \mapsto \frac{\sin x}{1 - \cos x}$.
Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ et montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
4. *Cas particulier 2* : On suppose dans cette question que $h : x \mapsto x \sin x$.
En remarquant que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
5. *Cas général* : Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la fonction h pour que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

8 *Approximation polynomiale de la racine carrée*

On définit par récurrence la suite (P_n) de polynômes par :

$$P_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2).$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0, 1]$, $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(P_n(x))$ est croissante.
En déduire que la suite (P_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction à déterminer.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0, 1]$: $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.
4. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.
Montrer que la suite (g_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle et en déduire la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite (P_n) .

9 *Convergence uniforme et produit*

1. Montrer que si f et g sont deux fonctions bornées définies sur un intervalle I alors :

$$\|fg\|_{\infty}^I \leq \|f\|_{\infty}^I \|g\|_{\infty}^I.$$

2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions continues sur $[a, b]$ convergeant uniformément sur $[a, b]$ respectivement vers f et g .
Montrer que $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers fg .
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{x+n}$ et $g_n : x \mapsto x$.
Montrer que les suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent uniformément sur $[1, +\infty[$.
La suite $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[1, +\infty[$?

10 Limite uniforme de polynômes

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynômiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - P_N(x)| \leq 1.$$

2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
 3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.
-

11 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{xn^2 + 1}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
 2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$ vers la fonction nulle. Que peut-on en déduire pour la série $\sum_{n \geq 1} f_n$?
 3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
-

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
 2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
 3. La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?
-

13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. La série $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}.$$

En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

14 Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur I de la série de fonction $\sum_{n \geq 0} f_n$ dans les cas suivants.

$$1. f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx^2}}{1+n^2}, I = \mathbb{R}, \quad 2. f_n : x \mapsto x^n \ln x, I =]0, 1], \quad 3. f_n : x \mapsto x^n \ln^2 x, I =]0, 1]$$

15 Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \mapsto n^\alpha x^n (1-x)$.

Trouver les valeurs du réel α pour lesquelles la série de fonctions $\sum u_n$ est simplement convergente, uniformément convergente, normalement convergente sur $[0, 1]$.

16 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}) dx$.

17 Montrer que $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$. En déduire la valeur de cette somme.

18 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.
 2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En déduire que S est continue sur $\mathbb{R}$.
 3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$. En déduire que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
 4. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S'\left(\frac{1}{N}\right) \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$.
En déduire que S n'est pas dérivable en 0.
-

19 Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
 2. Étudier la monotonie de S .
 3. Déterminer la limite de S en $+\infty$ puis un équivalent de S en $+\infty$.
-

20 On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f et étudier la continuité de f sur D .
 2. Montrer que f est strictement décroissante sur D .
 3. Montrer que f est dérivable sur D .
 4. Étudier la limite de f en $+\infty$.
 5. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ (on pourra utiliser une comparaison série-intégrale).
-

21 1. Justifier la définition de la fonction $f : \begin{cases}]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n x \sin(nx) \end{cases}$

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$. Calculer f' sous forme d'une somme infinie.
 3. Montrer que : $\forall x \in]0, \pi[, f'(x) = -1$. En déduire f sur $]0, \pi[$.
-

22 On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.