

Quelle est la définition d'une norme sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E ?

Donner la seconde inégalité triangulaire.

Soit u un vecteur non nul. Comment peut-on obtenir un vecteur unitaire à partir de u ?

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Quelle est la définition de $\max(E)$?

Soit $m \in \mathbb{R}$. Donner une caractérisation de $m = \max(E)$.

Un ensemble E admet-il toujours un maximum ? Donner deux exemples de situations dans lesquelles $\max(E)$ existe.

Donner une norme utilisant un maximum dans sa définition.

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Quelle est la définition de $\sup(E)$?

Soit $m \in \mathbb{R}$. Donner une caractérisation de $m = \sup(E)$.

*Un ensemble E admet-il toujours une borne supérieure dans $\mathbb{R}$?
À quelles conditions en admet-il une ?*

Donner une norme utilisant une borne supérieure dans sa définition.

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

★ On appelle *norme sur E* toute application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- ★ $\forall u \in E, \|u\| \geq 0$
- ★ *Séparation* : $\forall u \in E, [\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0_E]$
- ★ *Homogénéité* : $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
- ★ *Inégalité triangulaire* : $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

N.B. : Quand on doit montrer qu'une application est une norme, on pensera à vérifier que l'application est bien définie.

★ *Seconde inégalité triangulaire* : On a pour tout $(u, v) \in E^2$:

$$\| \|u\| - \|v\| \| \leq \|u - v\|.$$

★ Le vecteur $\frac{u}{\|u\|}$ est un vecteur de norme 1.

★ *Le maximum de E* , noté $\max(E)$, est le plus grand élément de E .
On a l'équivalence :

$$m = \max(E) \iff \begin{cases} \forall x \in E, x \leq m & (m \text{ est un majorant de } E) \\ m \in E & (m \text{ est un élément de } E) \end{cases}$$

★ Un ensemble E n'a pas toujours de maximum. Par exemple, $[0, 1[$ n'a pas de plus grand élément.

Si E est un ensemble fini non vide alors le réel $\max(E)$ existe.

Si $E = \{f(t), t \in [a, b]\}$ où f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ (où a et b sont deux réels avec $a \leq b$) alors le réel $\max(E)$ existe.

★ Sur $\mathbb{K}^n$, la *norme infinie* est définie par :

$$\forall u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|.$$

★ *La borne supérieure de E* , noté $\sup(E)$, est le plus petit des majorants de E .
On a l'équivalence :

$$m = \sup(E) \iff \begin{cases} \forall x \in E, x \leq m & (m \text{ est un majorant de } E) \\ \text{si } M \text{ est un majorant de } E \text{ alors } m \leq M \text{ (c'est le plus petit)} \end{cases}$$

★ Un ensemble E n'admet pas toujours de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Par exemple, $[0, +\infty[$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Si E est un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ alors il admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Par convention : Lorsque E est non majoré, on peut poser $\sup(E) = +\infty$.

★ Sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ (espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$ où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$), la *norme infinie* est définie par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $\ell \in E$.

Comment peut-on étudier si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ ?

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

★ *Méthode 1* : On utilise la caractérisation :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \iff \|u_n - \ell\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

- *Cas 1* : On arrive à calculer $\|u_n - \ell\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas, il ne reste plus qu'à étudier si cette quantité tend vers 0.

- *Cas 2* : On arrive à majorer $\|u_n - \ell\|$ par une quantité qui tend vers 0.

On peut alors conclure par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - \ell\| = 0$.

★ *Méthode 2* : *Uniquement si E est de dimension finie*

- Par l'équivalence des normes, on peut choisir la norme que l'on veut dans ce cas.

- On fixe une base $\mathcal{B}$ de E .

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si les suites de coordonnées de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la base $\mathcal{B}$ convergent vers les coordonnées correspondantes de ℓ .