CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 2

EXERCICE 1 *Source E3A PC 2023*
1.a. On a $v - w = u - \mathrm{id}_E - u + 2\mathrm{id}_E$ donc $\boxed{v - w = \mathrm{id}_E}$.
Comme $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Im}(w)$ sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a par définition, $\mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w) \subset E$.
Montrons l'inclusion $E \subset \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.
Soit $x \in E$. On a par ce qui précède :

$$x = \mathrm{id}_E(x) = v(x) - w(x) = v(x) + w(-x).$$

Comme $v(x) \in \mathrm{Im}(v)$ et $w(-x) \in \mathrm{Im}(w)$, on en déduit que $x \in \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$.
Ainsi :

$$\boxed{E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w).}$$

1.b. On a $v \circ w = (u - \mathrm{id}_E) \circ (u - 2\mathrm{id}_E) = u^2 - 2u - u + 2\mathrm{id}_E = u^2 - 3u + 2\mathrm{id}_E = P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ car P est un polynôme annulateur de u.
Comme v et w sont deux polynômes en u ($v = Q(u)$ avec $Q = X - 1$ et $w = R(u)$ avec $R = X - 2$), ils commutent donc on a :

$$\boxed{v \circ w = w \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

1.c. Soit $y \in \mathrm{Im}(w)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = w(x)$.
On a alors $v(y) = v\big(w(x)\big) = (v \circ w)(x) = 0_E$ puisque $v \circ w = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
On en déduit que $y \in \mathrm{Ker}(v)$.
Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v).}$$

Comme $w \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on montre de la même façon que $\boxed{\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w).}$

1.d. Montrons que $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Ker}(w)$ sont en somme directe.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Ker}(w)$.
Comme $x \in \mathrm{Ker}(v)$, on a $v(x) = 0_E$ donc $u(x) - x = 0_E$ donc $u(x) = x$.
Comme $x \in \mathrm{Ker}(w)$, on a $w(x) = 0_E$ donc $u(x) - 2x = 0_E$ donc $u(x) = 2x$.
Ainsi, $x = 2x$ d'où $x = 0_E$.
On a donc prouvé que $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Ker}(w) = \{0_E\}$ (puisqu'on a clairement $0_E \in \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Ker}(w)$ car 0_E appartient à tout sous-espace vectoriel de E).
On en déduit que $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Ker}(w)$ sont en somme directe.
On a clairement $\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w) \subset E$.
Soit maintenant $x \in E$.
Comme $E = \mathrm{Im}(v) + \mathrm{Im}(w)$, il existe $y \in \mathrm{Im}(v)$ et $z \in \mathrm{Im}(w)$ tel que $x = y + z$.
Or, $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$ donc $y \in \mathrm{Ker}(w)$ et $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$ donc $z \in \mathrm{Ker}(v)$.
On en déduit que $x \in \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.
Ainsi, $E \subset \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$.
On a donc établi l'égalité :

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w).}$$

1.e. Comme v et w sont des polynômes en u, ils commutent avec u.
On en déduit par le cours que :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(v) \text{ et } \mathrm{Ker}(w) \text{ sont stables par } u.}$$

2. On a $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$ avec $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Ker}(w)$ stables par u.
Par le cours, on en déduit que dans une base adaptée à cette décomposition (c'est-à-dire obtenue par concaténation d'une base $\mathscr{F}$ de $\mathrm{Ker}(v)$ et d'une base $\mathscr{G}$ de $\mathrm{Ker}(w)$), la matrice de u est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$$

(si on note $q = \dim(\mathrm{Ker}(v))$ et $r = \dim(\mathrm{Ker}(w))$).
On sait de plus que A est la matrice dans la base $\mathscr{F}$ de l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}(v)$ et B est la matrice dans la base $\mathscr{G}$ de l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}(w)$.
Comme pour tout $x \in \mathrm{Ker}(v)$, $u(x) - x = 0_E$, on a $u(x) = x$.
On en déduit que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}(v)$ est $\mathrm{id}_{\mathrm{Ker}(v)}$ et donc $A = I_q$.
De même, comme pour tout $x \in \mathrm{Ker}(w)$, $u(x) - 2x = 0_E$, on a $u(x) = 2x$.
On en déduit que l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}(w)$ est $2\mathrm{id}_{\mathrm{Ker}(v)}$ et donc $B = 2I_r$.
Ainsi, la matrice $\begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & (0) \\ (0) & 2I_r \end{pmatrix}$ est diagonale.
Ainsi :

$$\boxed{\text{dans une base adaptée à la décomposition } E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w) \text{, la matrice de } u \text{ est diagonale.}}$$

3. La trace (respectivement le déterminant) de u est la trace (respectivement le déterminant) de sa matrice dans n'importe quelle base de E.
On en déduit que $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(D)$ et $\det(u) = \det(D)$ en notant $D = \begin{pmatrix} I_q & (0) \\ (0) & 2I_r \end{pmatrix}$ la matrice obtenue à la question précédente.
La trace est la somme des cœfficients diagonaux donc $\mathrm{tr}(D) = q + 2r = (n-r) + 2r = n + r$ puisque $q + r = n$.
Comme D est diagonale, son déterminant est le produit de ses cœfficients diagonaux d'où $\det(D) = 2^r$.
Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{tr}(u) = n + r \text{ et } \det(u) = 2^r.}$$

4.a. Montrons que P est un polynôme annulateur de U c'est-à-dire que $U^2 - 3U + 2I_3 = 0_3$.
On a $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ donc $U^2 - 3U = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I_3$ d'où le résultat.
Ainsi, P est un polynôme annulateur de la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ donc :

$$\boxed{\text{le polynôme } P \text{ est un polynôme annulateur de } u.}$$

4.b. On a $V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = U - I_3$ donc $\boxed{V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

De même, $W = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u - 2\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) - 2\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = U - 2I_3$ donc $\boxed{W = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

4.c. Déterminons $\mathrm{Ker}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{3,1} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} y \\ y \\ -x + y + z \end{pmatrix} = 0_{3,1} \right\}$.

La résolution du système $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ y & = & 0 \\ -x + y + z & = & 0 \end{array} \right.$ donne $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x & = & z. \end{array} \right.$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(V)$ et elle est libre car constituée d'un seul vecteur non nul donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(V)$.
Proposons une autre méthode pour déterminer $\mathrm{Ker}(W)$.
On a $\mathrm{rg}(W) = 1$ car la troisième colonne est nulle, la seconde est colinéaire à la première et la première est non nulle.
Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(W)) = 3 - 1 = 2$.
Or, on a $W\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0_{3,1}$ et $W\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0_{3,1}$.
On en déduit que $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille de $\mathrm{Ker}(W)$, de cardinal $2 = \dim(\mathrm{Ker}(W))$ et cette famille est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.
On en déduit que c'est une base de $\mathrm{Ker}(W)$.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(V) \text{ et } \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(W).}$$

Par les relations vectoriel/matriciel dans la base $\mathscr{B}$, on en déduit que :

$$\boxed{(e_1 + e_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(v) \text{ et } (e_1 + e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(w).}$$

4.d. D'après la question 2., la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Ker}(w)$ est diagonale.
Considérons une telle base en juxtaposant les vecteurs des bases obtenues à la question précédente : $\mathscr{C} = (e_1 + e_3, e_1 + e_2, e_3)$.
On a alors établi que la matrice de u dans cette base est $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.
Par les relations de changements de base, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} \text{ c'est-à-dire } U = QDQ^{-1}$$

en posant $Q = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{en posant } D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \text{ on a } D \text{ diagonale, } Q \text{ inversible et } U = QDQ^{-1}.}$$

Exercice 2 *Source CCINP MP 2022*

1. S'il existe $(i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i_0 \neq j_0$ tel que $x_{i_0} = x_{j_0}$ alors le déterminant est nul car ses colonnes numéro i_0 et j_0 sont égales et on a aussi $\prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) = 0$ car un des facteurs du produit est nul.

> Si au moins deux des complexes sont égaux alors il y a bien égalité.
> Il suffit donc de faire la démonstration pour des complexes deux à deux distincts.

2. On a :

$$\boxed{V(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.}$$

3.a. Soit $t \in \mathbb{C}$. On a :

$$P(t) = V(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & t \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & t^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & t^{n-1} \end{vmatrix}.$$

En développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} t^{i-1} \Delta_{i,n}$$

où pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\Delta_{i,n}$ est le déterminant de la matrice à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne n, c'est un complexe qui ne dépend pas de t.
De par la forme obtenue, on en déduit que :

$$\boxed{P \text{ est une fonction polynômiale de degré au plus } n-1.}$$

3.b. $\boxed{\text{Le cœfficient de } t^{n-1} \text{ est}}$ d'après ce qui précède :

$$(-1)^{2n}\Delta_{n,n} = \boxed{V(x_1,\dots,x_{n-1})}.$$

3.c. On remarque que pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$, on a $P(x_i) = 0$ car c'est le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales.
Ainsi, $\boxed{x_1,\dots,x_{n-1} \text{ sont } n-1 \text{ racines distinctes de } P}$.
On en déduit que P se factorise par $\prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i)$.
De plus, comme P est de degré inférieur ou égale à $n-1$, on en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P = c\prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i).$$

De plus, c est le cœfficient de P devant X^{n-1}.
On déduit donc de ce qui précède que :

$$\boxed{P = V(x_1,\dots,x_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(X - x_i).}$$

4. *Initialisation :* Pour $n = 2$, d'après la question 2, on a $V(x_1,x_2) = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2}(x_j - x_i)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$.
On suppose le résultat vrai au rang $n-1$. Montrons-le au rang n.
Par ce qui précède et par hypothèse de récurrence, on a pour tout $t \in \mathbb{C}$:

$$P(t) = V(x_1,\dots,x_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(t - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1}(x_j - x_i)\prod_{i=1}^{n-1}(t - x_i).$$

On en déduit que :

$$V(x_1,\dots,x_n) = P(x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1}(x_j - x_i)\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_j - x_i).$$

On a donc prouvé par récurrence le résultat souhaité pour tout $n \geqslant 2$:

$$\boxed{V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).}$$

5.a. Notons D_n ce déterminant.
On peut mettre x_1 en facteur dans la première colonne, x_2 en facteur dans la deuxième colonne, etc. On en déduit par linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne :

$$\boxed{D_n =}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = x_1x_2\dots x_n V(x_1,\dots,x_n) = \boxed{\prod_{i=1}^n x_i \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)}.$$

5.b. Raisonnons par l'absurde en supposant que toutes ces sommes sont nulles.

Notons A_n la matrice $A_n = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$A_n\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{k=1}^n x_k\\ \sum_{k=1}^n x_k^2\\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n x_k^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Or, $\det(A_n) = D_n = \prod_{i=1}^n x_i \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i) \neq 0$ car les nombres complexes $x_1,\dots,x_n$ sont tous non nuls et deux à deux distincts.
Ainsi, la matrice A_n est inversible et donc :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = A_n^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = 0_{n,1}$$

ce qui est absurde.
Ainsi :

$$\boxed{\text{l'une au moins des sommes } \sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n x_k^2, \sum_{k=1}^n x_k^3, \dots, \sum_{k=1}^n x_k^n \text{ est non nulle.}}$$

Exercice 3

1. On sait que $P = P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2$ donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix}P(a_0)\\P(a_1)\\P(a_2)\end{pmatrix}}$.

2. Notons A la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.
La matrice A contient, en colonne, les coordonnées des vecteurs 1, X, X^2 dans la base $\mathscr{B}$.
Par la question 1., on en déduit que :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix}1 & a_0 & a_0^2\\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}}.$$

3. Par définition, L_0 est le polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui s'annule en a_1 et a_2 et qui prend la valeur 1 en a_0 donc :

$$L_0 = \frac{(X-1)(X+2)}{(-1-1)(-1+2)} = -\frac{1}{2}(X^2+X-2) = -\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + 1.$$

De même :

$$L_1 = \frac{(X+1)(X+2)}{(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}(X^2+3X+2) = \frac{1}{6}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}$$

et :

$$L_2 = \frac{(X+1)(X-1)}{(-2+1)(-2-1)} = \frac{1}{3}(X^2-1) = \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{L_0 = -\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + 1,\ L_1 = \frac{1}{6}X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{3} \text{ et } L_2 = \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}.}$$

4. En tant que matrice de passage, on sait par le cours que $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est inversible}}$ et A^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{B}$.
La matrice A^{-1} s'obtient donc en écrivant, en colonne, les coordonnées des vecteurs L_0, L_1 et L_2 dans la base canonique. Par la question précédente, on a donc :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}.}$$

Problème *Source Mines PC 2007*
Dans toute la suite, si M est une matrice de taille $p \times q$, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, on note $[M]_{i,j}$ le cœfficient de M sur la ligne i et la colonne j.

I.A.1. On suppose que les matrices M et N sont stochastiques.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On a $[MN]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k}[N]_{k,j}$.
Comme M et N sont stochastiques, tous leurs cœfficients sont positifs donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $[M]_{i,k}[N]_{k,j} \geqslant 0$ donc par somme, $[MN]_{i,j} \geqslant 0$.
De plus, comme M et N sont stochastiques, on a $MJ = J$ et $NJ = J$ d'où :

$$(MN)J = M(NJ) = MJ = J.$$

Ainsi, la matrice MN est stochastique.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ et } N \text{ sont stochastiques alors } MN \text{ est stochastique.}}$$

I.A.2. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, M^k est stochastique.
Initialisation : Pour $k = 0$, on a $M^0 = I_n$.
Tous les cœfficients de la matrice identité sont bien positifs et $I_n J = J$ donc la matrice I_n est stochastique.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que M^k est stochastique.
Montrons que M^{k+1} est stochastique.
On a $M^{k+1} = M^k M$.
Or, par hypothèse de récurrence, la matrice M^k est stochastique et par hypothèse, M est stochastique donc par la question I.A.1, on en déduit que leur produit M^{k+1} est une matrice stochastique.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ M^k \text{ est stochastique.}}$$

I.A.3. Utilisons les suites de coordonnées dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
On sait que $[M]_{i,j} = \lim\limits_{k\to+\infty} [M_k]_{i,j}$.
Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, M_k est stochastique, on a $[M_k]_{i,j} \geqslant 0$.
Par passage à la limite dans cette inégalité, on en déduit que $[M]_{i,j} \geqslant 0$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k J = J$ car M_k est stochastique donc $[M_k J]_i = [J]_i$ c'est-à-dire $\sum\limits_{j=1}^{n} [M_k]_{i,j} = 1$.
Par convergence de toutes les suites de coordonnées, on en déduit par passage à la limite dans cette égalité que $\sum\limits_{j=1}^{n} [M]_{i,j} = 1$ ou encore $[MJ]_i = [J]_i$.
Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on en déduit l'égalité matricielle $MJ = J$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la matrice } M \text{ est stochastique.}}$$

I.B.1. $\star$ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Par définition du maximum, on a en particulier $\|M\| \geqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{1,j}| \geqslant 0$ par somme de termes positifs.
Ainsi, $\|.\|$ définit bien une application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathbb{R}_+$.
$\star$ *Séparation :* Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M\| = 0$.
Le maximum étant un majorant, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \leqslant \|M\| = 0$ donc $\sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}| = 0$ et on en déduit que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $m_{i,j} = 0$ car une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls.
Ainsi, tous les cœfficients de M sont nuls donc M est la matrice nulle.
$\star$ *Homogénéité :* Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\|\lambda M\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda m_{i,j}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda||m_{i,j}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \overset{(\star)}{=} |\lambda| \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| = |\lambda|\|M\|.$$

En effet, comme $|\lambda| \geqslant 0$ et $\left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}|, 1 \leqslant i \leqslant n \right\} \neq \varnothing$, on a $\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda| \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}| = |\lambda| \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$ et les bornes supérieures sont ici des maximums car les ensembles considérés sont finis.
$\star$ *Inégalité triangulaire :* Soit $(M,N) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, par inégalité triangulaire :

$$|[M+N]_{i,j}| = |[M]_{i,j} + [N]_{i,j}| = |[M]_{i,j}| + |[N]_{i,j}|$$

puis par somme (croissance et linéarité) :

$$\sum_{j=1}^{n} |[M+N]_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |[M]_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |[N]_{i,j}| \leqslant \|M\| + \|N\|.$$

Or, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{n} |[M+N]_{i_0,j}| = \|M+N\|$ donc les inégalités ci-dessus étant en particulier vrai pour $i = i_0$, on obtient :

$$\|M+N\| \leqslant \|M\| + \|N\|.$$

On a donc prouvé que :

$$\boxed{\|.\| \text{ est une norme sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

I.B.2. On a $\|MN\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |[MN]_{i,j}|$.
On a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ par inégalité triangulaire :

$$|[MN]_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^{n} [M]_{i,k}[N]_{k,j} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |[M]_{i,k}||[N]_{k,j}|.$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a par somme :

$$\sum_{j=1}^{n} |[MN]_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |[M]_{i,k}||[N]_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |[M]_{i,k}||[N]_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n} |[M]_{i,k}| \left(\sum_{j=1}^{n} |[N]_{k,j}|\right).$$

Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |[N]_{k,j}| \leqslant \|N\|$ donc par multiplication par un réel positif puis somme, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n} |[MN]_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |[M]_{i,k}| \|N\| = \|N\| \sum_{k=1}^{n} |[M]_{i,k}| \leqslant \|N\| \|M\|.$$

Or, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sum_{j=1}^{n} |[MN]_{i_0,j}| = \|MN\|$ donc en appliquant ce qui précède avec $i = i_0$, on obtient :

$$\boxed{\|MN\| \leqslant \|M\|\|N\|.}$$

I.B.3. On suppose que M est une matrice stochastique.
On a alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |\underbrace{m_{i,j}}_{\geqslant 0}| = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$.

En effet, comme $MJ = J$, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $[MJ]_i = [J]_i$ c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$.

On en déduit que $\|M\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} 1 = 1$.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est une matrice stochastique alors } \|M\| = 1.}$$

II.1. Notons tout d'abord qu'on a $\mathrm{Im}(\varphi^2) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$ (c'est vrai pour tout endomorphisme).
En effet, si $Y \in \mathrm{Im}(\varphi^2)$ alors il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = \varphi^2(X) = \varphi\big(\varphi(X)\big)$ donc $Y \in \mathrm{Im}(\varphi)$.
On suppose désormais que A admet un pseudo-inverse A'.
Montrons qu'on a $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Im}(\varphi^2)$.
Soit $Y \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Alors il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = \varphi(X)$.
Par les propriétés vérifiées par A et A', on a alors :

$$Y = AX \underset{(2)}{=} AA'AX \underset{(1)}{=} A^2A'X = \varphi^2(A'X).$$

On en déduit que $Y \in \mathrm{Im}(\varphi^2)$.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi^2) \text{ d'où en considérant les dimensions, } \mathrm{rg}(\varphi) = \dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(\varphi^2)\big) = \mathrm{rg}(\varphi^2).}$$

II.2. $\star$ Notons tout d'abord qu'on a $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi^2)$.
En effet, si $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ alors $\varphi(X) = 0_{n,1}$ et donc $\varphi^2(X) = \varphi(\varphi(X)) = \varphi(0_{n,1}) = 0_{n,1}$ d'où $X \in \mathrm{Ker}(\varphi^2)$.
De plus, on a par le théorème du rang :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi)\big) = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) - \mathrm{rg}(\varphi^2) = \dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi^2)\big).$$

On en déduit l'égalité $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$.
Montrons désormais qu'on a $\mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{n,1}\}$.
Soit $Y \in \mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Comme $Y \in \mathrm{Im}(\varphi)$, il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = \varphi(X)$.
Comme $Y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $\varphi(Y) = 0_{n,1}$.
Par suite, on a $\varphi^2(X) = \varphi(Y) = 0_{n,1}$ donc $X \in \mathrm{Ker}(\varphi^2) = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
On a donc $\varphi(X) = 0_{n,1}$ c'est-à-dire $Y = 0_{n,1}$.
On en déduit que $\mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{n,1}\}$ donc l'image et le noyau de φ sont en somme directe.

$\star$ On a de plus par le théorème du rang, $\dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi)\big) = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
Ainsi l'image et le noyau de φ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi).}$$

II.3. Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ adaptée à la décomposition $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$ (obtenue par concaténation d'une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et d'une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(\varphi)$).
On sait que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont stables par φ (puisque par définition, pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(Y) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ donc c'est en particulier vrai pour tout Y de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et le résultat est clair pour le noyau car φ commute avec φ) donc la matrice M de φ dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} B & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & C \end{array}\right) \text{ avec } B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R}) \text{ et } C \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{R}).$$

De plus, C est la matrice de l'endomorphisme induit par φ sur $\mathrm{Ker}(\varphi)$ dans la base $\mathscr{B}_2$.
Comme pour tout $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $\varphi(X) = 0_{n,1}$, c'est l'endomorphisme nul d'où $C = 0_{n-r}$.
On sait également que B est la matrice de l'endomorphisme u induit par φ sur $\mathrm{Im}(\varphi)$ dans la base $\mathscr{B}_1$.
On a $\mathrm{Ker}(u) = \{X \in \mathrm{Im}(\varphi),\ \varphi(X) = 0_{n,1}\} = \mathrm{Im}(\varphi) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{n,1}\}$.
Ainsi, u est un endomorphisme injectif de $\mathrm{Im}(\varphi)$ qui est de dimension finie donc u est automorphisme.
Par suite, la matrice B est inversible.
En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$, on a $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et par les formules de changement de base, $A = PMP^{-1}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{on a } B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R}) \text{ inversible et } P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ inversible telles que } A = P\left(\begin{array}{c|c} B & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{array}\right)P^{-1}.}$$

II.4. Notons $A' = P\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1}$.

On a $AA' = P\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\underbrace{P^{-1}P}_{I_n}\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1} = P\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1}$ en effectuant le produit par blocs.

On a de même, $A'A = P\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1} = W\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1}$ d'où $AA' = A'A$.

On a également :

$$AA'A = P\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1} = P\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1} = A$$

et

$$A'AA' = P\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1} = P\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1} = A'.$$

Ainsi :

$$\boxed{A' = P\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1} \text{ est un pseudo-inverse de } A.}$$

II.5. On a $AA' = A'A$ donc φ et φ' commutent. D'après le cours, on en déduit :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est stable par } \varphi'.}$$

Montrons que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est stable par φ'.
Soit $Y \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Alors il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = \varphi(X)$.
On a alors $\varphi'(Y) = \varphi'(\varphi(X)) = \varphi' \circ \varphi(X) = \varphi \circ \varphi'(X) = \varphi(\varphi'(X))$ donc $\varphi'(Y) \in \mathrm{Im}(\varphi)$.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) \text{ est stable par } \varphi'.}$$

D'après les formules de changement de base, $P^{-1}A'P$ est la matrice de l'endomorphisme φ' dans la base $\mathscr{B}$.
$\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$ et les espaces $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont stables par φ' donc cette matrice est diagonale par blocs :

$$P^{-1}A'P = \left(\begin{array}{c|c} C & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & D \end{array}\right) \text{ avec } C \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R}) \text{ et } D \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{R}).$$

De plus, D est la matrice de l'endomorphisme induit par φ' sur $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
Or, pour tout $X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a $\varphi'(X) = A'X =_{(3)} A'AA'X =_{(1)} A'^2AX = A'^2 0_{n,1} = 0_{n,1}$.
L'endomorphisme induit par φ' sur $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est donc l'endomorphisme nul et par suite, $D = 0_{n-r}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{on a } A' = P\left(\begin{array}{c|c} C & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{array}\right)P^{-1} \text{ où } C \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R}).}$$

II.6. En raison des propriétés vérifiées par les matrices A et A', on a :

$$(\varphi \circ \varphi') \circ (\varphi \circ \varphi') = \varphi \circ (\varphi' \circ \varphi \circ \varphi') \underset{(3)}{=} \varphi \circ \varphi'$$

donc $\varphi \circ \varphi'$ est un projecteur.
On a de plus $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi' \circ \varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi' \circ \varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi \circ \varphi' \circ \varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Par suite, on a $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi' \circ \varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi \circ \varphi')$.
On a $\mathrm{Im}(\varphi \circ \varphi') \subset \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Im}(\varphi \circ \varphi' \circ \varphi) \subset \mathrm{Im}(\varphi \circ \varphi')$.
Par suite, on a $\mathrm{Im}(\varphi \circ \varphi') = \mathrm{Im}(\varphi)$.
Ainsi :

$$\boxed{\varphi \circ \varphi' \text{ est la projection sur } \mathrm{Im}(\varphi \circ \varphi') = \mathrm{Im}(\varphi) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(\varphi \circ \varphi') = \mathrm{Ker}(\varphi).}$$

On a d'une part :

$$P^{-1}(AA')P = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} BC & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

D'autre part, $P^{-1}(AA')P$ est la matrice de l'endomorphisme $\varphi \circ \varphi'$ dans la base $\mathscr{B}$.
$\varphi \circ \varphi'$ est la projection sur $\mathrm{Im}(\varphi)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
Comme la base $\mathscr{B}$ est adaptée à la décomposition $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$, on en déduit :

$$P^{-1}(AA')P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

En effet, si on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ alors on a pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $(\varphi \circ \varphi')(e_i) = e_i$ et pour tout $i \in [\![r+1, n]\!]$, $(\varphi \circ \varphi')(e_i) = 0_{n,1}$.
Ainsi :

$$\boxed{P^{-1}(AA')P = \left(\begin{array}{c|c} BC & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).}$$

II.7 D'après la question précédente, on a $BC = I_r$ donc $C = B^{-1}$.
On a donc $A' = P\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)P^{-1}$.

$$\boxed{A \text{ admet un unique pseudo-inverse.}}$$

III.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit d'une somme télescopique. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1}\big((I_r - D)^j - (I_r - D)^{j+1}\big) &= \sum_{j=0}^{k-1}(I_r - D)^j - \sum_{j=0}^{k-1}(I_r - D)^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}(I_r - D)^j - \sum_{\ell=1}^{k}(I_r - D)^{\ell} \\ &= (I_r - D)^0 - (I_r - D)^k\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1}\big((I_r - D)^j - (I_r - D)^{j+1}\big) = I_r - (I_r - D)^k.}$$

Or, on a $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\big((I_r - D)^j - (I_r - D)^{j+1}\big) = \sum_{j=0}^{k-1}(I_r - D)^j\big(I_r - (I_r - D)\big) = \left(\sum_{j=0}^{k-1}(I_r - D)^j\right)D.$

On a donc $\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{k-1}(I_r - D)^j\right)D = I_r - (I_r - D)^k$ d'où en multipliant à droite par D^{-1} :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1}(I_r - D)^j = (I_r - (I_r - D)^k)D^{-1}.}$$

III.2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On a pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$:

$$M^j = (I_n - A)^j = \left(P\left(\begin{array}{c|c} I_r - B & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r}\end{array}\right)P^{-1}\right)^j = P\left(\begin{array}{c|c} I_r - B & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r}\end{array}\right)^j P^{-1} = P\left(\begin{array}{c|c} (I_r - B)^j & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r}\end{array}\right)P^{-1}$$

car la matrice est diagonale par blocs.
Par somme, on en déduit que :

$$\sum_{j=0}^{k-1} M^j = P\left(\begin{array}{c|c} \sum_{j=0}^{k-1}(I_r - B)^j & 0 \\ \hline 0 & kI_{n-r}\end{array}\right)P^{-1} = P\left(\begin{array}{c|c} (I_r - (I_r - B)^k)B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & kI_{n-r}\end{array}\right)P^{-1}$$

en utilisant la question III.1 (B est inversible).
D'autre part :

$$\begin{aligned}(I_n - M^k)A' &= \left(P\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r}\end{array}\right)P^{-1} - P\left(\begin{array}{c|c} (I_r - B)^k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r}\end{array}\right)P^{-1}\right) \times P\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)P^{-1} \\ &= P\left(\begin{array}{c|c} I_r - (I_r - B)^k & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)P^{-1} \times P\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)P^{-1} \\ &= P\left(\begin{array}{c|c} (I_r - (I_r - B)^k)B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)P^{-1}\end{aligned}$$

et :

$$I_n - AA' = P\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r}\end{array}\right)P^{-1} - P\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r}\end{array}\right)P^{-1}P\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r}\end{array}\right)P^{-1} = P\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r}\end{array}\right)P^{-1}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} M^j = (I_n - M^k)A' + k(I_n - AA').}$$

III.3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Comme la norme $\|.\|$ est sous-multiplicative (d'après I.B.2), on a :

$$\|(I_n - M^k)A'\| \leqslant \|I_n - M^k\| \|A'\|$$

puis par inégalité triangulaire :

$$\|I_n - M^k\| \leqslant \|I_n\| + \|M^k\| = 1 + 1 = 2$$

car les matrices $I^n = M^0$ et M^k sont stochastiques (d'après I.A.2) donc sont de norme 1 (d'après I.B.3).
On en déduit que :

$$\boxed{\|(I_n - M^k)A'\| \leqslant 2\|A'\|.}$$

D'après III.2, on a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \left\| \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} M^j - (I_n - AA') \right\| = \frac{1}{k} \|(I_n - M^k)A'\| \leqslant \frac{2\|A'\|}{k}.$$

Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{2\|A'\|}{k} = 0$, on obtient par encadrement que $\lim\limits_{k \to +\infty} \left\| \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} M^j - (I_n - AA') \right\| = 0$.
Cela signifie que :

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} M^j = I_n - AA'.}$$

III.4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que la matrice $\dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} M^j$ est stochastique.
D'après I.A.2, pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, M^j est stochastique donc les cœfficients de M^j sont positifs et $M^j J = J$.
On a pour tout $(i, l) \in [\![1, n]\!]$, $\left[\dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} M^j \right]_{i,l} = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{[M^j]_{i,l}}_{\geqslant 0} \geqslant 0$.
De plus, $\left(\dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} M^j \right) J = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{M^j J}_{=J} = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} J = \dfrac{1}{k} \times kJ = J$.
Ainsi, $\left(\dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} M^j \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de matrices stochastiques, qui converge vers $I_n - AA'$.
Par I.A.3, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice } I_n - AA' \text{ est stochastique.}}$$