

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a).....	$\frac{4}{5}$	1.3 c).....	$\frac{-10}{3}$	1.7	$\frac{n^3 + n}{n + 1}$
1.1 b).....	2^5	1.3 d).....	$1\ 000$	1.8 a).....	$4 + \frac{5}{6}$
1.1 c).....	3	1.4	$\frac{16}{35}$	1.8 b).....	$1 + \frac{1}{k - 1}$
1.1 d).....	$-2 \times 3^{3k-2}$	1.5 a).....	$2\ 022$	1.8 c).....	$3 + \frac{5}{x - 2}$
1.2 a).....	$\frac{1}{6}$	1.5 b).....	$\frac{1}{2}$	1.9	$2t$
1.2 b).....	$\frac{7}{15}$	1.5 c).....	1	1.10 a).....	$\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$
1.2 c).....	9	1.5 d).....	2	1.10 b).....	$\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$
1.2 d).....	$\frac{1}{9}$	1.6 a).....	$\frac{-1}{n(n+1)^2}$	1.10 c).....	$\frac{125}{25} = \frac{105}{21}$
1.3 a).....	247	1.6 b).....	$-\frac{ab}{a-b}$	1.11	Non
1.3 b).....	$\frac{203}{24}$	1.6 c).....	$\frac{3}{2}n$	1.12	$A > B$

Corrigés

1.1 a) $\frac{32}{40} = \frac{8 \times 4}{8 \times 5} = \frac{4}{5}$

1.1 b) $8^3 \times \frac{1}{4^2} = (2 \times 4)^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5$

1.1 c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{3^4}{3^3} = 3$

1.1 d) On a : $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} = \frac{(-2) \times (-2)^{2k} \times 3^{2k} \times 3^{-1}}{4^k \times 3^{-k} \times 3} = \frac{(-2) \times 4^k \times 3^{2k} \times 3^k}{4^k \times 3^2} = -2 \times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{6-4}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} - 0,2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} - \frac{2 \times 3}{10 \times 3} = \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} = \frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times \frac{5}{1} = \frac{36 \times 15 \times 5}{25 \times 12 \times 1} = \frac{12 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 12 \times 1} = \frac{3 \times 3}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{2}{15} \times \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{15 \times 6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{5} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{7} \\ = 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 5 \times 7 + 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 3 \times 5 = 105 + 70 + 42 + 30 = 247.$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \times \frac{21}{24} = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{31}{5} \right) \times \frac{7}{8} \\ = \left(\frac{136}{15} + \frac{3}{5} \right) \times \frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15} + \frac{9}{15} \right) \times \frac{7}{8} = \frac{145}{15} \times \frac{7}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{203}{24}.$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 - 5^{10} \times 7^4}{5^9 \times 7^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} = \frac{5^{10} \times 7^3(1 - 7)}{5^9 \times 7^3(1 + 2^3)} = \frac{5 \times (-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1\,958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979} = \frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,979 \times 21 + 21 + 1\,958}{1\,979 \times (1\,980 - 1\,978)} \\ = \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21) + 1\,979}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21 + 1)}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times 2\,000}{1\,979 \times 2} \\ = 1\,000.$$

1.4 On calcule :

$$\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5} = \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}} \\ = \frac{3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)}{5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

1.5 a) On connaît l'identité remarquable : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

$$\text{Donc : } \frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)} = \frac{2\,022}{(2\,022)^2 + (1 - 2\,022) \times (1 + 2\,022)} = \frac{2\,022}{(2\,022)^2 + 1 - 2\,022^2} = 2\,022.$$

1.5 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2} = \frac{2\,021^2}{(2\,021 - 1)^2 + (2\,021 + 1)^2 - 2} \\ = \frac{2\,021^2}{2\,021^2 - 2 \times 2\,021 \times 1 + 1 + 1 + 2\,021^2 + 2 \times 2\,021 \times 1 + 1 - 2} \\ = \frac{2\,021^2}{2\,021^2 - 2 \times 2\,021 \times 1 + 2\,021^2 + 2 \times 2\,021 \times 1} = \frac{2\,021}{2\,021 - 2 + 2\,021 + 2} = \frac{1}{2}.$$

1.5 c) En posant $a = 1\,234$, on a : $1\,235 = a + 1$ et $2\,469 = 2a + 1$.

$$\text{Donc : } \frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235} = \frac{(a + 1)(2a + 1) - a}{a(2a + 1) + a + 1} = \frac{2a^2 + 2a + 1}{2a^2 + 2a + 1} = 1.$$

1.5 d) En posant $a = 1\,000$, on a : $999 = a - 1$, $1\,001 = a + 1$, $1\,002 = a + 2$ et $4\,002 = 4a + 2$.

$$\text{Donc : } \frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001} = \frac{4a + 2}{a(a + 2) - (a - 1)(a + 1)} = \frac{2(2a + 1)}{a^2 + 2a - (a^2 - 1)} = \frac{2(2a + 1)}{2a + 1} = 2.$$

1.6 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} &= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n + n^2 + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$

1.6 b) On rappelle la formule : $a^3 - b^3 = (a-b)(ab + a^2 + b^2)$. Cela donne :

$$\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{(a-b)(ab + a^2 + b^2)}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{ab + a^2 + b^2}{a-b} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b}.$$

1.6 c) Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a :

$$\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \frac{6(n+1)}{2(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$$

1.7

$$\text{De } \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ on a : } \frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k} = \frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n(n^2+1)}{n+1} = \frac{n^3+n}{n+1}.$$

1.8 a)

$$\text{On trouve } \frac{29}{6} = \frac{4 \times 6 + 5}{6} = 4 + \frac{5}{6}.$$

1.8 b)

$$\text{On trouve } \frac{k}{k-1} = \frac{k-1+1}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1}.$$

1.8 c)

$$\text{On trouve } \frac{3x-1}{x-2} = \frac{3(x-2)+5}{x-2} = 3 + \frac{5}{x-2}.$$

1.9

Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2} - \frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{1+2t+t^2 - (1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

$$\text{Donc, } AB = \left(\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2} \right) \times (1+t^2)(1+t)^2 = 2t.$$

1.10 a)

$$\frac{3}{5} = \frac{27}{45} > \frac{5}{9} = \frac{25}{45}$$

1.10 c)

$$\frac{125}{25} = 5 = \frac{105}{21}$$

1.11

Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A = B$, si et seulement si $33\,215 \times 208\,341 = 66\,317 \times 104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impairs, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

1.12

On ré-écrit $A = \frac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B = \frac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1) \times (10^7+1) = 10^{12} + 10^7 + 10^5 + 1$.

D'autre part : $(10^6+1)^2 = 10^{12} + 2 \times 10^6 + 1$.

Comme $(10^5+1) \times (10^7+1) > (10^6+1) \times (10^6+1)$, on obtient : $A > B$.

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a).....	10^8	2.2 b).....	5^{-6}	2.3 b).....	$2^{21} \cdot 3$	2.5 a).....	$\frac{x}{x+1}$
2.1 b).....	10^{15}	2.2 c).....	2^7	2.3 c).....	2	2.5 b).....	$\frac{1}{x-2}$
2.1 c).....	10^2	2.2 d).....	$(-7)^{-2}$	2.3 d).....	$2^{38} \cdot 3^{26}$	2.5 c).....	$\frac{2x}{x+1}$
2.1 d).....	10^{-2}	2.2 e).....	3^5	2.4 a).....	8	2.5 d).....	$\frac{2}{x-2}$
2.1 e).....	10^4	2.2 f).....	3^{28}	2.4 b).....	11		
2.1 f).....	10^{-8}	2.3 a).....	$2^{-4} \cdot 3^{-1}$	2.4 c).....	3^{10}		
2.2 a).....	15^4			2.4 d).....	$2^6 \cdot 5$		

Corrigés

2.3 a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^{4-1} \cdot 2^{8-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^7} = 2^{3-7} \cdot 3^{2-3} = 2^{-4} \cdot 3^{-1}.$

2.3 b) On factorise : $2^{21} + 2^{22} = 2^{21} + 2^{21} \cdot 2 = 2^{21} \cdot (1 + 2) = 2^{21} \cdot 3.$

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \frac{(3 + 1) \cdot 3^{21}}{(3 - 1) \cdot 3^{21}} = \frac{4}{2} = 2.$

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}} = \frac{3^{16} \cdot 2^{32}}{3^{-10} \cdot 2^{-6}} = 2^{38} \cdot 3^{26}.$

2.4 a) On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 : $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{3 \cdot 17} \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-6}}{3^{2 \cdot (-3)} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{51-6} \cdot 3^{-6}}{3^{-6} \cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4} = \frac{(5 \cdot 11)^2 \cdot (11^2)^{-2} \cdot (5^3)^2}{5^2 \cdot 11 \cdot (11^2 \cdot 5)^{-2} \cdot (5^2)^4} = \frac{5^8 \cdot 11^{-2}}{5^8 \cdot 11^{-3}} = 11.$

2.4 c) On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}} = \frac{(2^2)^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 5^4}{(5^2)^2 \cdot 2^{-4} \cdot (3^2)^{-4}} = \frac{2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^4}{2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 5^4} = 3^{10}.$

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6} = \frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 7^3 \cdot 2^4 \cdot 7^2 \cdot 3^6 \cdot 5^6} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5^7 \cdot 7^5}{2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^5} = 2^6 \cdot 5.$

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}$

2.5 b) Même méthode : $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2) - (x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{8}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x} = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x} = \frac{1}{x} + \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{x-2+x}{x(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{x-2}$

Fiche n° 3. Expressions algébriques

Réponses

3.1 a)	$7a^2 + 12a + 7$	3.2 e)	-1	3.4 d)	$ab - c$
3.1 b)	$a^2 - 1$	3.2 f)	31	3.4 e)	ac
3.1 c)	$4a^2 - a - 3$	3.3 a)	$a^2 + 2$	3.4 f)	$-2ac + b^2$
3.1 d)	$-a^2 + 1$	3.3 b)	$a^3 + 3a$	3.5 a)	$a^2b - ac - 2b^2$
3.2 a)	3	3.3 c)	$a^4 + 4a^2 + 2$	3.5 b) ...	$a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$
3.2 b)	1	3.4 a)	$a^2 - 2b$	3.5 c)	0
3.2 c)	1	3.4 b)	$ab - 3c$	3.5 d)	1
3.2 d)	0	3.4 c)	$a^3 - 3ab + 3c$	3.5 e)	a

Corrigés

3.1 a) On développe $(a + 2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2 - 1$.

3.1 b) De $a^3 = a^2 - 1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2 - 1) = a^5 - a^3$ et donc $a^5 - a^6 = a^3$. De plus $a^3 = a^2 - 1$.

3.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2 - 1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 = -a^2 - a$ puis $a^{12} = (-a^2 - a)^2 = a^4 + 2a^3 + a^2$.

3.1 d) L'égalité $a^3 - a^2 + 1$ peut s'écrire $a(a - a^2) = 1$ ce qui montre que $a \neq 0$ et $\frac{1}{a} = a - a^2$. Alors $\frac{1}{a^2} = 1 - a$.

3.2 a) De $a^5 = 1$, on déduit $a^7 = a^2$ et $a^6 = a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4 - 1 = 3$.

3.2 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123} \times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, etc. et on obtient donc finalement $a^4 \times a^1 \times a^2 \times a^3 = a^{10} = 1$.

3.2 c) Ceci vaut a^S où $S = \sum_{k=0}^{1234} k = \frac{1234 \times (1234 + 1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

3.2 d) Cette somme partielle de suite géométrique vaut $\frac{a^5 - 1}{a - 1}$.

3.2 e) Cette somme géométrique vaut $\frac{a^{99} - 1}{a - 1} \times a^1 = \frac{a^{100} - a}{a - 1} = \frac{1 - a}{a - 1} = -1$.

3.2 f) En réordonnant les facteurs et en développant, on obtient :

$$(2 - a^1)(2 - a^4)(2 - a^2)(2 - a^3) = (5 - 2(a + a^4))(5 - 2(a^2 + a^3)) = 25 - 10(a + a^2 + a^3 + a^4) + 4(a + a^4)(a^2 + a^3).$$

Or $a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ et $(a + a^4)(a^2 + a^3) = a^3 + a^6 + a^4 + a^7 = a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ aussi.

3.3 a) On complète le carré : $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$.

3.3 b) On se ramène au résultat précédent : $x^3 - \frac{1}{x^3} = x\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) = a(a^2 + 2) + a$.

3.3 c) De même : $x^4 + \frac{1}{x^4} = x^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x^2} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 2 = (a^2 + 2)^2 - 2$.

3.4 a) On développe $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ puis on conclut par soustraction.

3.4 b) On reconnaît $x(xy + zx) + y(yz + xy) + z(zx + yz) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$.

3.4 c) Le développement $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3[x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)] + 6xyz$ conduit par soustraction à $a^3 - 3(ab - 3c) - 6c$ d'après l'expression précédente.

3.4 d) *Première solution* : on développe et on obtient une combinaison des expressions précédentes.

Deuxième solution : on reconnaît $(a - z)(a - x)(a - y) = a^3 - (x + y + z)a^2 + (xy + yz + zx)a - xyz$.

3.4 e) En factorisant, on reconnaît $(x + y + z)xyz$.

3.4 f) On se ramène à $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2(x^2yz + y^2xz + z^2xy)$.

3.5 a) On cherche $x^2(xy + zx) + y^2(yz + xy) + z^2(zx + yz)$, c'est-à-dire $(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx) - x^2yz - y^2zx - z^2xy$.

3.5 b) *Première solution* : on développe $(x + y + z)^4$ puis on conclut par soustraction à l'aide des calculs précédents.

Deuxième solution : on remarque qu'il s'agit de calculer $(x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$, donc qu'il suffit de développer $(a^2 - 2b)^2 - 2(b^2 - 2ac)$.

3.5 c) On réduit au même dénominateur $(x - y)(y - z)(z - x)$ puis on développe le numérateur.

3.5 d) On réduit au même dénominateur $(x-y)(y-z)(z-x)$ puis on factorise le numérateur par $(z-y)$:

$$\begin{aligned} x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x) &= x^2(z-y) + (y^2 - z^2)x - yz(y-z) \\ &= (z-y)[x^2 - (y+z)x + yz], \end{aligned}$$

et l'on reconnaît pour le dernier facteur : $x^2 - (y+z)x + yz = (x-y)x - (x-y)z = (x-y)(x-z)$.

3.5 e) On procède de même :

$$\begin{aligned} x^3(z-y) + y^3(x-z) + z^3(y-x) &= x^3(z-y) + (y^3 - z^3)x - yz(y^2 - z^2) \\ &= (z-y)[x^3 - (y^2 + yz + z^2)x + yz(y+z)] \\ &= (z-y)[(x^2 - y^2)x - yz(x-y) - z^2(x-y)] \\ &= (z-y)(x-y)[(x+y)x - yz - z^2] \\ &= (z-y)(x-y)[(x^2 - z^2) + (x-z)y] \\ &= (z-y)(x-y)(x-z)[(x+z) + y], \end{aligned}$$

d'où $x + y + z = a$ après simplification par le dénominateur.