

## Fractions

## Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

## Calculs dans l'ensemble des rationnels

## Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre  $k$  désigne un entier naturel).

a)  $\frac{32}{40}$  .....

c)  $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$  .....

b)  $8^3 \times \frac{1}{4^2}$  .....

d)  $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$  .....

## Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a)  $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$  .....

c)  $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$  .....

b)  $\frac{2}{3} - 0,2$  .....

d)  $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$  .....

## Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a)  $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$  .....

b)  $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$  .....

c)  $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$  .....

d)  $\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$  .....

## Calcul 1.4 — Un petit calcul.



Écrire  $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$  sous forme d'une fraction irréductible. ....

## Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a)  $\frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$  ...

c)  $\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$  .....

b)  $\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$  .....

d)  $\frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$  ...

### Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a)  $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  .....
- b)  $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$  pour  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ , distincts deux à deux. ....
- c)  $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ . ....

### Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.



Simplifier  $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en utilisant la formule  $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ . ....

### Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.



Soit  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Écrire les fractions suivantes sous la forme  $a + \frac{b}{X}$  avec  $a$  et  $b$  entiers et  $X \in \mathbb{R}$ .

- a)  $\frac{29}{6}$  .....       b)  $\frac{k}{k-1}$  ...       c)  $\frac{3x-1}{x-2}$  ..

### Calcul 1.9 — Un produit de fractions.



Soit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . On donne  $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$  et  $B = (1+t^2)(1+t)^2$ .

Simplifier  $AB$  autant que possible. ....

## Comparaison

### Calcul 1.10 — Règles de comparaison.



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a)  $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$  .....       b)  $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$  .....       c)  $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$  .....

### Calcul 1.11 — Produit en croix.



Les nombres  $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$  et  $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$  sont-ils égaux ? Oui ou non ? .....

### Calcul 1.12 — Produit en croix.



On pose  $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$  et  $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$  : a-t-on  $A > B$ ,  $A = B$  ou  $A < B$  ? .....

### Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{-1}{n(n+1)^2} & -\frac{ab}{a-b} & 2 & 3 & \frac{12}{11} > \frac{10}{12} & \frac{1}{2} & 247 & \frac{n^3+n}{n+1} & 1\ 000 & \frac{1}{9} \\ 2t & 2\ 022 & \frac{-10}{3} & \frac{4}{5} & 3 + \frac{5}{x-2} & \frac{3}{2}n & \frac{203}{24} & \frac{7}{15} & \frac{1}{6} & \frac{3}{5} > \frac{5}{9} & 9 \\ 4 + \frac{5}{6} & A > B & 1 & \frac{16}{35} & 2^5 & -2 \times 3^{3k-2} & \text{Non} & 1 + \frac{1}{k-1} & \frac{125}{25} = \frac{105}{21} \end{array}$$

# Puissances

## Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

### Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a)  $10^5 \cdot 10^3$  .....       c)  $\frac{10^5}{10^3}$  .....       e)  $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$  .....

b)  $(10^5)^3$  .....       d)  $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$  .....       f)  $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$  .....

### Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $a^n$  avec  $a$  et  $n$  deux entiers relatifs.

a)  $3^4 \cdot 5^4$  .....       c)  $\frac{2^5}{2^{-2}}$  .....       e)  $\frac{6^5}{2^5}$  .....

b)  $(5^3)^{-2}$  .....       d)  $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$  .....       f)  $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$  .....

### Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $2^n \cdot 3^p$ , où  $n$  et  $p$  sont deux entiers relatifs.

a)  $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$  .....       c)  $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$  .....

b)  $2^{21} + 2^{22}$  .....       d)  $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$  .....

### Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a)  $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$  .....       c)  $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$  .....

b)  $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$  .....       d)  $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$  .....

### Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel  $x$ .

a)  $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$  .....       c)  $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$  .....

b)  $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$  .....       d)  $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$  .....

### Réponses mélangées

|                 |        |                  |                       |               |          |                 |                       |
|-----------------|--------|------------------|-----------------------|---------------|----------|-----------------|-----------------------|
| $\frac{x}{x+1}$ | $15^4$ | $\frac{2x}{x+1}$ | $2^{21} \cdot 3$      | $10^{15}$     | 11       | $5^{-6}$        | $2^{38} \cdot 3^{26}$ |
| $10^2$          | $10^8$ | $10^{-2}$        | $2^{-4} \cdot 3^{-1}$ | $2^6 \cdot 5$ | $3^5$    | $(-7)^{-2}$     |                       |
| $\frac{2}{x-2}$ | $10^4$ | 8                | $2^7$                 | $10^{-8}$     | $3^{10}$ | $\frac{1}{x-2}$ | $3^{28}$ 2            |

## Fiche de calcul n° 3

## Expressions algébriques

## Prérequis

Identités remarquables.

## Équations polynomiales

## Calcul 3.1 — Cubique.


 Soit  $a$  un nombre réel tel que  $a^3 - a^2 + 1 = 0$ .

 Exprimer les quantités suivantes sous la forme  $xa^2 + ya + z$  où  $x, y, z$  sont trois nombres rationnels.

a)  $(a + 2)^3$  .....

c)  $a^{12}$  .....

b)  $a^5 - a^6$  .....

d)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$  .....

## Calcul 3.2 — Puissance cinquième.


 Soit  $a$  un nombre distinct de 1 tel que  $a^5 = 1$ . Calculer les nombres suivants :

a)  $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$  .....

b)  $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$  .....

c)  $\prod_{k=0}^{1234} a^k$  .....

d)  $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$  .....

e)  $\sum_{k=1}^{99} a^k$  .....

f)  $\prod_{k=0}^4 (2 - a^k)$  .....

# Expressions symétriques

## Calcul 3.3 — Inverse.



Soit  $x$  un réel non nul. On pose  $a = x - \frac{1}{x}$ . Exprimer les quantités suivantes en fonction de  $a$  uniquement.

a)  $x^2 + \frac{1}{x^2} \dots$

b)  $x^3 - \frac{1}{x^3} \dots$

c)  $x^4 + \frac{1}{x^4} \dots$

## Calcul 3.4 — Trois variables.



Soient  $x, y, z$  trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad \text{et} \quad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de  $a, b, c$  uniquement.

a)  $x^2 + y^2 + z^2 \dots$

b)  $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) \dots$

c)  $x^3 + y^3 + z^3 \dots$

d)  $(x + y)(y + z)(z + x) \dots$

e)  $x^2yz + y^2zx + z^2xy \dots$

f)  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \dots$

## Calcul 3.5



Même exercice.

a)  $x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y) \dots$

b)  $x^4 + y^4 + z^4 \dots$

c)  $\frac{x}{(x - y)(x - z)} + \frac{y}{(y - z)(y - x)} + \frac{z}{(z - x)(z - y)} \dots$

d)  $\frac{x^2}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^2}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^2}{(z - x)(z - y)} \dots$

e)  $\frac{x^3}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^3}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^3}{(z - x)(z - y)} \dots$

## Réponses mélangées

|                  |              |            |                    |                  |      |                            |
|------------------|--------------|------------|--------------------|------------------|------|----------------------------|
| $4a^2 - a - 3$   | $a^2 + 2$    | $a^2 - 2b$ | $a$                | $ab - 3c$        | $1$  | $a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$ |
| $a^3 - 3ab + 3c$ | $ac$         | $ab - c$   | $0$                | $3$              | $-1$ | $-a^2 + 1$                 |
| $31$             | $-2ac + b^2$ | $a^2 - 1$  | $a^2b - ac - 2b^2$ | $7a^2 + 12a + 7$ | $1$  | $a^3 + 3a$                 |