

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a).....	$\boxed{5}$	4.3 a)	$\boxed{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}}$	4.5 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{x-1}}$
4.1 b).....	$\boxed{\sqrt{3} - 1}$	4.3 b)	$\boxed{3 - 2\sqrt{2}}$	4.5 d)	$\boxed{\frac{1}{2} \frac{1}{x-1}}$
4.1 c).....	$\boxed{-\sqrt{3} + 2}$	4.3 c).....	$\boxed{1 - \sqrt{10} + \sqrt{15}}$	4.5 e)	$\boxed{\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$
4.1 d).....	$\boxed{\sqrt{7} - 2}$	4.3 d)....	$\boxed{\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2}$	4.5 f)	$\boxed{-4(x-1)^2}$
4.1 e).....	$\boxed{\pi - 3}$	4.3 e)	$\boxed{-(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$	4.6 a).....	$\boxed{\sqrt{2}}$
4.1 f).....	$\boxed{ 3 - a }$	4.3 f)	$\boxed{-\frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}}$	4.6 b)	$\boxed{2\sqrt{2}}$
4.2 a)	$\boxed{20}$	4.3 g).....	$\boxed{2\sqrt{2}}$	4.7 a).....	$\boxed{-11 + 5\sqrt{5}}$
4.2 b)	$\boxed{9 + 4\sqrt{5}}$	4.3 h)	$\boxed{50 - 25\sqrt{3}}$	4.7 b).....	$\boxed{1 + \sqrt{2}}$
4.2 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{3}}$	4.4	$\boxed{\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}}$	4.7 c).....	$\boxed{1 + \sqrt{2}}$
4.2 d).....	$\boxed{3 + \sqrt{2}}$	4.5 a).....	$\boxed{\frac{x}{\sqrt{x-1}}}$	4.7 d).....	$\boxed{\sqrt{3}}$
4.2 e).....	$\boxed{12\sqrt{7}}$	4.5 b).....	$\boxed{x - \sqrt{x^2 - 1}}$	4.7 e).....	$\boxed{1 + \sqrt{5}}$
4.2 f).....	$\boxed{12}$			4.7 f)	$\boxed{\ln(1 + \sqrt{2})}$
4.2 g).....	$\boxed{9 - \frac{10}{3}\sqrt{2}}$			4.8	$\boxed{1}$
4.2 h)	$\boxed{10}$				

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

4.1 f) On trouve $|3 - a|$, c'est-à-dire $3 - a$ si $a \leq 3$ et $a - 3$ si $a \geq 3$.

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}.$$

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} &= \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{2})}{2^2 - 2} = \frac{4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

4.4 On pose $A := \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + (\sqrt{2} + \sqrt{3}))(1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3}))} = \frac{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{1 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}{4 + 2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)(4 - 2\sqrt{6})}{(4 + 2\sqrt{6})(4 - 2\sqrt{6})} = \frac{4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 4 + 2\sqrt{6}}{16 - 24} = \frac{2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}.$$

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x + 2f(x)} = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2 + 2\sqrt{x-1} + 1} = \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} = \sqrt{x-1} + 1.$$

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\frac{1}{4} \frac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x) + 4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2 - 1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3 + \sqrt{5}}\sqrt{3 - \sqrt{5}} + 3 - \sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{9 - 5} = 6 - 2\sqrt{4} = 6 - 4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} \geq 0$, donc $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

4.7 b) On calcule $3 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + 1^2 = (1 + \sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{5} + 5} = \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2} = 1 + \sqrt{5}.$

4.8 Appelons A ce nombre barbare, et écrivons-le $A = \alpha - \beta$ en posant

$$\alpha = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a

$$A^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$$

ce qui donne

$$A^3 = 6 - 3A \sqrt[3]{\left(3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)\left(-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}\right)}$$

d'où finalement $A^3 = 6 - 5A$, ce qui est équivalent à $(A - 1)(A^2 + A + 6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3 + 5t - 6 = 0$ d'inconnue t , puis finalement 1 est l'unique racine réelle de cette équation, et donc $A = 1$.

Fiche n° 5. Exponentielle et logarithme

Réponses

5.1 a).....	$4 \ln 2$	5.5 b).....	$\frac{1}{2}$	5.8 a).....	$\mathbb{R}$
5.1 b).....	$9 \ln 2$	5.5 c).....	$\frac{1}{3}$	5.8 b).....	ok
5.1 c).....	$-3 \ln 2$	5.5 d).....	$\frac{1}{9}$	5.8 c).....	1
5.1 d).....	$\frac{1}{2} \ln 2$	5.5 e).....	$-\frac{1}{2}$	5.8 d).....	-1
5.1 e).....	$3 \ln 2$	5.5 f).....	$\frac{3}{2}$	5.9 a).....	$x + \ln 2$
5.1 f).....	$2 \ln 2 + 2 \ln 3$	5.6 a).....	-2	5.9 b).....	$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
5.2 a).....	$-\ln 3 - 2 \ln 2$	5.6 b).....	$\frac{1}{\ln 2}$	5.9 c).....	$\ln x - 1 $
5.2 b).....	$2 \ln 3 - 2 \ln 2$	5.6 c).....	-17	5.9 d).....	$-\frac{1}{1+x}$
5.2 c).....	$\ln 3 + 11 \ln 2$	5.6 d).....	1	5.9 e).....	$(1+x)^x$
5.2 d).....	$3 \ln 5 + 2 \ln 2$	5.6 e).....	-1	5.10 a).....	$x \geq \frac{\ln 12 + 5}{3}$
5.2 e).....	$-2 \ln 5 + 4 \ln 2$	5.6 f).....	e	5.10 b).....	$x \in [0, 1]$
5.2 f).....	$2 \ln 5 - 2 \ln 2$	5.7 a).....	impaire	5.10 c).....	$x \geq \frac{2}{e}$
5.3.....	$-2 \ln 2 - 2 \ln 5$	5.7 b).....	impaire	5.10 d).....	$x \geq -\frac{1}{12}$
5.4 a).....	$\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$	5.7 c).....	impaire	5.10 e).....	$\emptyset$
5.4 b).....	$17 + 12\sqrt{2}$	5.7 d).....	impaire	5.10 f).....	$\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$
5.4 c).....	0				
5.4 d).....	0				
5.5 a).....	8				

Corrigés

5.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4 \ln 2$.

5.1 c) On a $0,125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0,125 = -\ln 8 = -3 \ln 2$.

5.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln 72 - 2 \ln 3 = (3 \ln 2 + 2 \ln 3) - 2 \ln 3 = 3 \ln 2$.

5.2 c) On a $0,875 = \frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned} \ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln(0,875) &= (\ln 3 + \ln 7) + 2(\ln 2 + \ln 7) - 3(\ln 7 - \ln 8) \\ &= \ln 3 + 2 \ln 3 + 3 \times 3 \ln 2 = 3 \ln 3 + 11 \ln 2. \end{aligned}$$

5.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k + 1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

5.4 a) On a $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2} + 1) = \frac{7}{16} \ln((1 + \sqrt{2})^2) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8} \ln(1 + \sqrt{2}) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\frac{7}{8} \ln \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{25}{8} \ln \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$.

5.4 c) On a $\gamma = \ln\left(\left((2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\right)^{20}\right) = \ln((4 - 3)^{20}) = 0$

5.6 b) On a $e^{-\ln \ln 2} = e^{(-1) \ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \frac{1}{\ln 2}$.

5.6 e) On a $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right) = \frac{1}{2} \ln(\exp(-\ln e^2)) = \frac{1}{2}(-\ln e^2) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$.

5.7 a) f_1 est définie sur $] - 2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in] - 2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln \frac{2021 - x}{2021 + x} = \ln \frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln \frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

5.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq |x| < \sqrt{x^2 + 1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \ln \frac{-x^2 + (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

5.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $] - \infty, -5[\cap \left(]61, +\infty[\cap] - \infty, -7[\right)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $] - \infty, -5[\cap \left(] - \infty, -7[\cup]61, +\infty[\right)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $] - \infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $] - \infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \frac{-13 + \sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in] - \infty, -7[$ et $x_2 \notin] - \infty, -7[$.

Fiche n° 6. Trigonométrie

Réponses

6.1 a) 0

6.1 b) 0

6.1 c) $-1 - \sqrt{3}$

6.1 d) $-\frac{1}{2}$

6.2 a) 0

6.2 b) $-\sin x$

6.2 c) $2 \cos x$

6.2 d) $-2 \cos x$

6.3 a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

6.3 b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

6.3 c) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

6.3 d) $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

6.4 a) $-\sin x$

6.4 b) $\frac{1}{\cos x}$

6.4 c) 0

6.4 d) $4 \cos^3 x - 3 \cos x$

6.5 a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$

6.5 b) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$

6.6 a) $\tan x$

6.6 b) 2

6.6 c) $8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

6.7 a) $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

6.7 a) $\left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$

6.7 a) $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.7 b) $\left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

6.7 b) $\left\{ \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3} \right\}$

6.7 b) $\left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.7 c) $\left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

6.7 c) $\left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\}$

6.7 c) $\left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.7 d) $\left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

6.7 d) $\left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

6.7 d) $\left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.7 e) $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

6.7 e) $\left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

6.7 e) $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.7 f) $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

6.7 f) $\left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

6.7 f) $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.7 g) $\left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}$

6.7 g) $\left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\}$

6.7 g) $\left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.7 h) $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

6.7 h) $\left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

- 6.7 h) $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 6.7 i) $\left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7} \right\}$
- 6.7 i) $\left\{ -\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7} \right\}$
- 6.7 i) $\left\{ \frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 6.7 j) $\left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\}$
- 6.7 j) $\left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\}$
- 6.7 j) $\left\{ \frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 6.8 a) $\left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi \right]$
- 6.8 a) $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$
- 6.8 b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right]$
- 6.8 b) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$
- 6.8 c) $\left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi \right]$
- 6.8 c) $\left[-\pi, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$
- 6.8 d) $\left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi \right]$
- 6.8 d) $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$
- 6.8 e) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right]$
- 6.8 e) $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$
- 6.8 f) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right]$
- 6.8 f) $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$
- 6.8 g) $\left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right]$
- 6.8 g) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$
- 6.8 h) $\left[0, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi \right]$
- 6.8 h) $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{8} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi \right]$

Corrigés

6.3 b) On peut utiliser $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ puis les formules d'addition.

6.4 b) On a

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(2x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

On peut aussi faire cette simplification à l'aide des formules de duplication :

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} - \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

6.4 d) On calcule

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x \sin^2 x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \end{aligned}$$

6.5 a) On a $\cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ donc $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$. De plus, $\cos \frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

6.5 b) On a $\sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

.....
6.6 a) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ donc $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x$.

6.6 b) On a $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$.

6.6 c) On a $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

6.7 e) Cela revient à résoudre « $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ».

6.7 g) Si on résout avec $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x \in [0, 4\pi]$.

Or, dans $[0, 4\pi]$, on a $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $t \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{23\pi}{6} \right\}$ et donc pour $x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}$.

6.7 h) $\sin x$ est solution de l'équation de degré 2 : $2t^2 + t - 1 = 0$ dont les solutions sont $t = -1$ et $t = \frac{1}{2}$. Ainsi, les x solutions sont les x tels que $\sin x = -1$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$.

6.7 j) On a $\cos \frac{\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{5\pi}{14}$. Finalement, on résout $\sin x = \sin \frac{5\pi}{14}$.

6.8 d) Cela revient à résoudre $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$.

6.8 f) On résout « $\tan x \geq 1$ ou $\tan x \leq -1$ ».

6.8 g) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geq 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

6.8 h) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geq 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}\right]$ puis $x \in \left[0, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$.
