

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\cdot}$ qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(-5)^2}$

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

e) $\sqrt{(3 - \pi)^2}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

f) $\sqrt{(3 - a)^2}$

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$

e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

b) $(2 + \sqrt{5})^2$

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$

c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

g) $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

d) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3



Écrire les expressions suivantes sans racines carrées au dénominateur.

a) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$

f) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

g) $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$

Calcul 4.4



Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{}$$

Calculs variés

Calcul 4.5 — Avec une variable.



On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$	$\boxed{}$	d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\boxed{}$
b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$	$\boxed{}$	e) $f(x) + 4f''(x)$	$\boxed{}$
c) $\sqrt{x+2f(x)}$	$\boxed{}$	f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$	$\boxed{}$

Calcul 4.6 — Mettre au carré.



Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$	$\boxed{}$	b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$	$\boxed{}$
--	----------------------------	--	----------------------------

Calcul 4.7 — Méli-mélo.



Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$	$\boxed{}$	d) $3e^{-\frac{1}{2}\ln 3}$	$\boxed{}$
b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$	$\boxed{}$	e) $2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$	$\boxed{}$
c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$	$\boxed{}$	f) $\frac{1}{2}\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$	$\boxed{}$

Calcul 4.8



On note $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$. Simplifier A

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A

Réponses mélangées

$\sqrt{3}-1$	$\ln(1+\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$	$-\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$	5
$\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$	$1+\sqrt{2}$	12	$9-\frac{10}{3}\sqrt{2}$	$3-2\sqrt{2}$	$1+3+\sqrt{2}$
$50-25\sqrt{3}$	$ 3-a $	$-\sqrt{3}+2$	$12\sqrt{7}$	10	$20+\sqrt{7}-2$
$-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$	$2\sqrt{2}$	$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$	$1+\sqrt{3}$	$-11+5\sqrt{5}$	$9+4\sqrt{5}+2\sqrt{2}$
$\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$	$-4(x-1)^2$	$x-\sqrt{x^2-1}$	$1+\sqrt{x-1}$	$2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$	
$\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$	$\pi-3$	$1+\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$

Exponentielle et logarithme

Prérequis

Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 5.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$

d) $\frac{1}{8} \ln \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{8}$

b) $\ln 512$

e) $\ln 72 - 2 \ln 3$

c) $\ln 0,125$

f) $\ln 36$

Calcul 5.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln \frac{1}{12}$

d) $\ln 500$

b) $\ln(2,25)$

e) $\ln \frac{16}{25}$

c) $\ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln(0,875)$

f) $\ln(6,25)$

Calcul 5.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$

Calcul 5.4 — Logarithme et radicaux.



a) On pose $\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2} + 1)$. Calculer $(1 + \sqrt{2})^2$ et $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2} - 1)$

b) Calculer β sachant que $\ln \beta = \ln(7 + 5\sqrt{2}) + 8 \ln(\sqrt{2} + 1) + 7 \ln(\sqrt{2} - 1)$

c) Simplifier $\gamma = \ln((2 + \sqrt{3})^{20}) + \ln((2 - \sqrt{3})^{20})$

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$

Exponentielles

Calcul 5.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3 \ln 2}$

d) $e^{-2 \ln 3}$

b) $\ln(\sqrt{e})$

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$

f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$

Calcul 5.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

b) $e^{-\ln \ln 2}$

e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$

c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$

f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$

Études de fonctions

Calcul 5.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021 + x}{2021 - x}$

b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Calcul 5.8 — Étude d'une fonction.



Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a + b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$

Calcul 5.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|
| a) $f(2e^x - 1)$ | <input type="text"/> | d) $xf'(x) - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ | <input type="text"/> | e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ | <input type="text"/> | | |

Équations, inéquations

Calcul 5.10



Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

- | | |
|---|----------------------|
| a) $e^{3x-5} \geq 12$ | <input type="text"/> |
| b) $1 \leq e^{-x^2+x}$ | <input type="text"/> |
| c) $e^{1+\ln x} \geq 2$ | <input type="text"/> |
| d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$ | <input type="text"/> |
| e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ | <input type="text"/> |
| f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$ | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

8	$\emptyset$	$-2 \ln 5 + 4 \ln 2$	ok	$3 \ln 5 + 2 \ln 2$	$-2 \ln 2 - 2 \ln 5$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\ln 2}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2} \ln 2$	$x \geq \frac{\ln 12 + 5}{3}$		$\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$	$\ln x-1 $	$x \geq \frac{2}{e}$	$2 \ln 2 + 2 \ln 3$
1	$x + \ln 2$	0	$\frac{3}{2}$	-17	$x \geq -\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{1+x}$	$(1+x)^x$
	$-\ln 3 - 2 \ln 2$	$\frac{1}{3}$	-2	impaire	$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$	-1	$\ln 3 + 11 \ln 2$
							$\mathbb{R}$
$2 \ln 5 - 2 \ln 2$	-1	1	$3 \ln 2$	$\frac{1}{2}$	$x \in [0, 1]$	0	impaire
							$4 \ln 2$
$2 \ln 3 - 2 \ln 2$	e	$17 + 12\sqrt{2}$	$-3 \ln 2$	$9 \ln 2$	impaire	$\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$	

Trigonométrie

Prérequis

Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 6.1



Simplifier :

a) $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$.

c) $\tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6}$

b) $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}$

d) $\cos^2 \frac{4\pi}{3} - \sin^2 \frac{4\pi}{3}$

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 6.2



Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$

Formules d'addition

Calcul 6.3



Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos \frac{5\pi}{12}$ (on a $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$)

c) $\sin \frac{\pi}{12}$

b) $\cos \frac{\pi}{12}$

d) $\tan \frac{\pi}{12}$

Calcul 6.4



a) Simplifier : $\sin(4x) \cos(5x) - \sin(5x) \cos(4x)$

b) Simplifier : $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

c) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

d) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$

Formules de duplication

Calcul 6.5



En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \frac{\pi}{8}$

b) $\sin \frac{\pi}{8}$

Calcul 6.6



a) Simplifier : $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ (avec $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Simplifier : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$

Équations trigonométriques

Calcul 6.7



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

f) $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$

h) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

d) $\tan x = -1$

i) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

j) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$

Inéquations trigonométriques

Calcul 6.8



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\tan x \geq 1$

b) $\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$

f) $|\tan x| \geq 1$

c) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

d) $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$

h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{l}
 2 \quad \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\} \quad -\sin x \\
 \left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \quad -\frac{1}{2} \quad \left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} \quad \tan x \\
 \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \quad 0 \quad \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} \quad \left[-\pi, -\frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right] \quad \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \\
 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\} \quad \left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi \right] \quad \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \quad \frac{1}{\cos x} \\
 -\sin x \quad \left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\} \quad \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi \right] \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \\
 \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right] \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right] \quad \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \\
 \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \quad \left\{ -\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\} \quad \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\} \quad -1 - \sqrt{3} \\
 \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left[0, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi \right] \\
 \left[-\pi, -\frac{5\pi}{8} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi \right] \quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \quad \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \\
 \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right] \quad \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi \right] \\
 \left\{ \frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \quad \left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\} \quad \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \\
 \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \quad 0 \quad \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 -2 \cos x \quad \left[-\pi, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right] \quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \quad \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \\
 \left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\} \quad 0 \quad 2 \cos x \quad \left\{ \frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 \left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \left\{ \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3} \right\} \quad \left[-\pi, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]
 \end{array}$$