Dérivation

Prérequis
Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 7.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in \,]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 7.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 7.3 — Avec des fonctions composées.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in \,]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

Calcul 7.4 — **Avec des fonctions composées** — ***bis.***

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$. ....

c) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. ....

d) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. ....

Calcul 7.5 — **Avec des quotients.**

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$. ....

b) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$. ....

d) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. ....

Opérations et fonctions composées

Calcul 7.6

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. ....

b) $x \in]-3,3[$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. ....

c) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$ ....

d) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$. ....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 7.7

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3, -2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2+x-2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. ....

Réponses mélangées

$5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$ $\quad \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}$ $\quad (2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)$

$8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4$ $\quad 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$ $\quad \dfrac{1}{1-x^2}$

$-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$ $\quad 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$ $\quad \dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\quad (-2x^2+3x+1)\exp(x^2+x)$

$\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$ $\quad \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$ $\quad \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$ $\quad \dfrac{6x}{(x^2+1)^2}\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$ $\quad \dfrac{2x}{x^2+1}$

$\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$ $\quad \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$ $\quad 5(x^2-5x)^4(2x-5)$ $\quad \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

$\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$ $\quad 6x^2 + 2x - 11$ $\quad \dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

$\dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$ $\quad (6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2-x}{x-2}$ $\quad -3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$

$\dfrac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2}\sin\left(\dfrac{2x+1}{x^2+4}\right)$ $\quad \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ $\quad 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Dérivation, équations du second degré.

Calculs de valeurs

Calcul 8.1 — Fonctions circulaires réciproques.

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ....

b) $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ....

c) $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ....

d) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

e) $\arctan(1)$ ....

f) $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)$ ....

Calcul 8.2 — Valeurs des fonctions hyperboliques.

Calculer les valeurs suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th}(x) = \operatorname{sh}(x)/\operatorname{ch}(x)$.

a) $\operatorname{ch}(0)$ ....

b) $\operatorname{sh}(0)$ ....

c) $\operatorname{ch}(\ln(2))$ ....

d) $\operatorname{sh}(\ln(3))$ ....

e) $\operatorname{ch}(\ln(2/3))$ ....

f) $\operatorname{th}(\ln(2))$ ....

Calcul 8.3 — Identités de trigonométrie hyperbolique.

Soient x et y des réels.

Calculer en développant soigneusement, et en simplifiant au maximum, les expressions suivantes.

a) $\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{ch}(y)\operatorname{sh}(x)$ ....

b) $\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$ ....

Résolution d'équations

Calcul 8.4 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \dfrac{9^x}{2}$ ....

b) $4^x = 2 \times 2^x$ ....

c) $2^x = 3 \times 4^x$ ....

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$ ...

Calcul 8.5 — Fonctions $x \longmapsto a^x$ (plus difficile).

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$ ....

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Calcul 8.6 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

b) $\cos(\arccos(x)) = 0$ ....

c) $\arccos(\cos(x)) = 0$ ....

d) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{\pi}{3}$ ......

e) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{1}{3}$ ......

f) $\tan(\arctan(x)) = 1$ ......

Calcul 8.7 — Équations avec des fonctions hyperboliques.

Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x)$.

a) $\mathrm{ch}(x) = \sqrt{5}$ ....

b) $\mathrm{sh}(x) = 1$ ....

c) $\mathrm{th}(x) = \dfrac{1}{3}$ ....

d) $\mathrm{ch}(x) \leqslant 4$ ....

e) $\mathrm{sh}(x) \geqslant 3$ ....

f) $\mathrm{th}(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

Dérivation

Calcul 8.8 — Quelques calculs de dérivées.

Dériver les fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 2^x + x^2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{3^x}{5^x + 1}$ ....

c) $x \longmapsto x^x$ ....

d) $x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}$ ......

Calcul 8.9 — Quelques calculs de dérivées – *bis*.

Dériver les fonctions suivantes. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x)$.

a) $x \longmapsto \arcsin(x^2)$ .....

b) $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$ .....

c) $x \longmapsto \arctan(\mathrm{th}(x))$ ..

d) $x \longmapsto \mathrm{sh}(\mathrm{ch}(x))$ ......

Calcul 8.10 — Deux dérivées importantes.

a) $x \longmapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ ....

b) $x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

Calcul 8.11 — Des dérivées plus compliquées.

Dériver les fonctions suivantes. Dans ce qui suit, la fonction F est une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) $x \mapsto F(x^x)$ ....

b) $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))})$ ....

c) $x \mapsto \sqrt{1-x^2} + x\arcsin(x)$ ....

d) $x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ ....

Réponses mélangées

$\{\ln(\sqrt{5}-2); \ln(\sqrt{5}+2)\}$ $\quad \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$ $\quad 1$ $\quad \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$ $\quad \dfrac{1}{2}\ln(2)$ $\quad x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)^2}\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(\mathrm{ch}(x))}}$

0 $\quad x \mapsto 2x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ $\quad x \mapsto \dfrac{1-\mathrm{th}^2(x)}{1+\mathrm{th}^2(x)}$ $\quad x \mapsto \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$ $\quad 0$ $\quad \dfrac{\pi}{6}$

$\dfrac{5}{4}$ $\quad \dfrac{\pi}{4}$ $\quad \ln(1+\sqrt{2})$ $\quad x \mapsto 0$ $\quad x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$ $\quad x \mapsto \arcsin(x)$

$\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$ $\quad x \mapsto \arctan(x)$ $\quad 1$ $\quad \dfrac{\pi}{3}$ $\quad \dfrac{13}{12}$ $\quad 1$ $\quad 1$ $\quad x \mapsto \dfrac{15^x\ln(3/5) + 3^x\ln(3)}{(5^x+1)^2}$

$\dfrac{\pi}{6}$ $\quad -\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ $\quad x \mapsto 0$ $\quad x \mapsto (\ln(x)+1)x^x\mathrm{e}^{-x^{2x}}$ $\quad x \mapsto (\ln(x)+1)x^x$ $\quad \dfrac{3}{5}$

$\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\ln(3)\right]$ $\quad x \mapsto \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}.$ $\quad \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ $\quad \mathrm{sh}(x+y)$

$\mathrm{ch}(x-y)$ $\quad [-\ln(4+\sqrt{15}), \ln(4+\sqrt{15})]$ $\quad \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad \left[\ln(3+\sqrt{10}), +\infty\right[$

$\left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ $\quad \dfrac{4}{3}$ $\quad x \mapsto \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(\mathrm{ch}(x))$ $\quad \dfrac{\pi}{4}$ $\quad 2$ $\quad \left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$