

Fiche n° 7. Dérivation

Réponses

7.1 a) $6x^2 + 2x - 11$

7.1 b) $5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$

7.1 c) $(2x^2 - 2x + 10) \exp(2x)$

7.1 d) $(6x - 1) \ln(x - 2) + \frac{3x^2 - x}{x - 2}$

7.2 a) $5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$

7.2 b) $4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$

7.2 c) $8 \cos^2(x) - 6 \cos(x) \sin(x) - 4$

7.2 d) $-3(3 \cos(x) - \sin(x))^2(3 \sin(x) + \cos(x))$

7.3 a) $\frac{2x}{x^2 + 1}$

7.3 b) $\frac{1}{x \ln(x)}$

7.3 c) $(-2x^2 + 3x + 1) \exp(x^2 + x)$

7.3 d) $6 \cos(2x) \exp(3 \sin(2x))$

7.4 a) $\frac{6x}{(x^2 + 1)^2} \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

7.4 b) $\frac{2x^2 + 2x - 8}{(x^2 + 4)^2} \sin\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

7.4 c) $\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

7.4 d) $\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

7.5 a) $\frac{(2x + 3)(2 \sin(x) + 3) - (x^2 + 3x) \times 2 \cos(x)}{(2 \sin(x) + 3)^2}$

7.5 b) $\frac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x + 2)^2}$

7.5 c) $-2 \frac{(x^2 + 1) \sin(2x + 1) + x \cos(2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$

7.5 d) $\frac{(4x + 3) \ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

7.6 a) $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

7.6 b) $\frac{9}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}}$

7.6 c) $\frac{1}{1 - x^2}$

7.6 d) $\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)}$

7.7 a) $\frac{10x - 5}{(3 - x)^2(2 + x)^2}$

7.7 b) $\frac{2}{x + 1} \left(x + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)$

7.7 c) $\frac{2x^2 + 2x + 5}{(x + 2)(x - 1)^2}$

7.7 d) $\frac{x^2}{(x + 1)^2}$

7.7 e) $\frac{2}{x(1 - \ln(x))^2}$

Corrigés

7.1 a) On calcule : $f'(x) = (2x + 3)(2x - 5) + (x^2 + 3x + 2) \times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

7.1 b) On calcule : $f'(x) = (3x^2 + 3)(x^2 - 5) + (x^3 + 3x + 2) \times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

7.1 c) On calcule : $f'(x) = (2x - 2) \exp(2x) + (x^2 - 2x + 6) \times 2 \exp(2x) = (2x^2 - 2x + 10) \exp(2x)$.

7.1 d) On calcule : $f'(x) = (6x - 1) \ln(x - 2) + (3x^2 - x) \times \frac{1}{x - 2} = (6x - 1) \ln(x - 2) + \frac{3x^2 - x}{x - 2}$.

7.2 a) On calcule : $f'(x) = 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$.

7.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3 + 4x - 1)(6x^2 + 4) = 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$.

7.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x) + 2\cos(x))(\cos(x) - 2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x) - 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) - 4\cos(x)\sin(x)) \\ &= -6\cos(x)\sin(x) - 4\sin^2(x) + 4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x) - 4(1 - \cos^2(x)) + 4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4. \end{aligned}$$

7.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x) - \sin(x))^2(-3\sin(x) - \cos(x)) = -3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$.

En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x) - 78\cos^3(x) - 9\sin(x) + 51\cos(x)$.

7.3 a) On calcule : $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln \circ u$.

7.3 b) On calcule : $f'(x) = \frac{1/x}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$.

7.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2 + x) + (2 - x)\exp(x^2 + x) \times (2x + 1) = (-1 + (2 - x)(2x + 1))\exp(x^2 + x) \\ &= (-1 + 4x + 2 - 2x^2 - x)\exp(x^2 + x) = (-2x^2 + 3x + 1)\exp(x^2 + x). \end{aligned}$$

7.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3 \times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

7.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \times \frac{4x(x^2 + 1) - (2x^2 - 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \frac{4x^3 + 4x - 4x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6x}{(x^2 + 1)^2} \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

7.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) \times \frac{2(x^2+4) - (2x+1) \times 2x}{(x^2+4)^2} = -\sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) \times \frac{2x^2+8-4x^2-2x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{2x^2+2x-8}{(x^2+4)^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right). \end{aligned}$$

7.4 c) On calcule : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cos(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

7.4 d) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

7.5 a) On calcule : $f'(x) = \frac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x) + 4x\sin(x) - 6x\cos(x) + 6\sin(x) + 6x + 9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

7.5 b) On calcule : $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2) - \sqrt{x} \times 3}{(3x+2)^2} = \frac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \frac{3x+2-6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \frac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

7.5 c) On calcule : $f'(x) = \frac{-2\sin(2x+1) \times (x^2+1) - \cos(2x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = -2 \frac{(x^2+1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

7.5 d) On calcule : $f'(x) = \frac{(4x+3)\ln(x) - (2x^2+3x)\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

7.6 a) On calcule : $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

7.6 b) On calcule : $f'(x) = \frac{\sqrt{9-x^2} - x \frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}^2} = \frac{\sqrt{9-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{\frac{9-x^2+x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \frac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

7.6 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f = \ln(\sqrt{u})$. Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u-x}} \times u'(x) \times \frac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \times \frac{1(x-1) - (x+1) \times 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \\ &= \frac{1}{2 \times \frac{x+1}{x-1}} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

7.6 d) On calcule : $f'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} \times \frac{x}{\sin(x)} = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)}$.

7.7 a) On calcule : $f'(x) = \frac{-(-1)}{(3-x)^2} + \frac{-1}{(2+x)^2} = \frac{(2+x)^2 - (3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \frac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

7.7 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \frac{1}{x+1} = \frac{2x(x+1) - 1}{x+1} = \frac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2 + 2x - 1$, on calcule $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \frac{2(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \frac{2}{x+1} \left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

7.7 c) On calcule : $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{1 \times (x-1) - (x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+x-2} + \frac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme $x^2 + x - 2$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2 + 2x + 5$ dont le discriminant est $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \frac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

7.7 d) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2 \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1 + (x+1)^2 - 2(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1 + x^2 + 2x + 1 - 2x - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

7.7 e) On calcule : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 - \ln(x)) - (1 + \ln(x)) \frac{-1}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{\frac{2}{x}}{(1 - \ln(x))^2} = \frac{2}{x(1 - \ln(x))^2}$.

Fiche n° 8. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

8.1 a).....	$\frac{\pi}{6}$	8.4 c).....	$-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$	8.7 d) ..	$[-\ln(4+\sqrt{15}), \ln(4+\sqrt{15})]$
8.1 b)	2	8.4 d).....	$\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$	8.7 e)	$[\ln(3+\sqrt{10}), +\infty[$
8.1 c).....	$\frac{\pi}{4}$	8.5 a)	$\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$	8.7 f).....	$\left]-\infty, \frac{1}{2}\ln(3)\right]$
8.1 d).....	$\frac{\pi}{6}$	8.5 b)	$\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$	8.8 a)	$x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$
8.1 e).....	$\frac{\pi}{4}$	8.5 c).....	$1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$	8.8 b) ..	$x \mapsto \frac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x + 1)^2}$
8.1 f)	$\frac{\pi}{3}$	8.5 d)	$\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$	8.8 c).....	$x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x$
8.2 a).....	1	8.6 a).....	1	8.8 d) ..	$x \mapsto \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos(x)^2}$
8.2 b)	0	8.6 b)	0	8.9 a).....	$x \mapsto 2x \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$
8.2 c).....	$\frac{5}{4}$	8.6 c)	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	8.9 b)	$x \mapsto \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)$
8.2 d).....	$\frac{4}{3}$	8.6 d)...	$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	8.9 c)	$x \mapsto \frac{1 - \operatorname{th}^2(x)}{1 + \operatorname{th}^2(x)}$
8.2 e).....	$\frac{13}{12}$	8.6 e) ..	$\left\{\frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	8.9 d)	$x \mapsto \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(\operatorname{ch}(x))$
8.2 f)	$\frac{3}{5}$	8.6 f).....	1	8.10 a)	$x \mapsto 0$
8.3 a)	$\operatorname{sh}(x+y)$	8.7 a) ..	$\{\ln(\sqrt{5}-2); \ln(\sqrt{5}+2)\}$	8.10 b)	$x \mapsto 0$
8.3 b)	$\operatorname{ch}(x-y)$	8.7 b).....	$\ln(1+\sqrt{2})$	8.11 a) ..	$x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x e^{-x^2}$
8.4 a)	$\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$	8.7 c).....	$\frac{1}{2}\ln(2)$	8.11 b) ..	$x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\ln(\operatorname{ch}(x))}}$
8.4 b)	1			8.11 c).....	$x \mapsto \arcsin(x)$
				8.11 d).....	$x \mapsto \arctan(x)$

Corrigés

8.1 b) On calcule : $\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 2.$

8.1 c) On remarque que $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

8.1 d) On remarque que $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{\pi}{6}.$

8.1 f) On remarque que $\arccos\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$

8.2 c) On calcule : $\text{ch}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$.

8.2 d) On calcule : $\text{sh}(\ln(3)) = \frac{e^{\ln(3)} - e^{-\ln(3)}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{4}{3}$.

8.2 e) On calcule : $\text{ch}(\ln(2/3)) = \frac{e^{\ln(2/3)} + e^{-\ln(2/3)}}{2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{6}}{2} = \frac{13}{12}$.

8.2 f) On sait que $\text{th}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$.

8.3 a) Développons :

$$\begin{aligned} \text{ch}(x)\text{sh}(y) + \text{ch}(y)\text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \frac{e^y + e^{-y}}{2} \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) + (e^y + e^{-y})(e^x - e^{-x})}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-(x+y)} + e^{x+y} - e^{y-x} + e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} = \text{sh}(x+y). \end{aligned}$$

8.4 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x = \frac{9^x}{2} \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln\left(\frac{9^x}{2}\right) \Leftrightarrow x \ln(3) = 2x \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

8.4 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x = 2 \times 2^x \Leftrightarrow 2x \ln(2) = (x+1) \ln(2) \Leftrightarrow 2x = x+1 \Leftrightarrow x = 1$.

8.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence $2^x = 3 \cdot 4^x \Leftrightarrow x \ln(2) = \ln(3) + 2x \ln(2) \Leftrightarrow x = -\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

8.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} 10^{2x} &= 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \ln(10^{2x}) = \ln(4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}) \Leftrightarrow 2x \ln(10) = \ln(4) + x \ln(5) + \frac{x}{2} \ln(9) \\ &\Leftrightarrow x \left(2 \ln(5) + 2 \ln(2) - \ln(5) - \frac{2 \ln(3)}{2} \right) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)}{2 \ln(2) + \ln(5) - \ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}. \end{aligned}$$

8.5 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 2^x$. Alors $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow X + X^2 - 4 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 16 = 17$, d'où deux racines, $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ est positive, donc $2^x + 4^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Leftrightarrow x \ln(2) = \ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

8.5 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $X = 4^x$. Alors $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow 4^x = 1$ ou $4^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

8.5 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\frac{1 \pm 5}{4}$, i.e. $\frac{3}{2}$ et -1 . La seule solution positive est $\frac{3}{2}$, donc $2 \times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

8.5 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.

Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La seule solution positive est $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Leftrightarrow x \ln(3) = \ln\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$.

8.6 a) Ici, pas de calcul : $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et, par stricte croissance de $\arcsin$, l'unique solution est 1.

8.6 b) Soit $x \in [-1, 1]$. Alors $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais comme $\arccos$ est à valeurs dans $[0, \pi]$, $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

8.6 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\arccos(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

8.6 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

8.6 e) Ici, pas besoin de connaître $\sin\left(\frac{1}{3}\right)$! Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

8.6 f) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\tan(\arctan(x)) = 1 \Leftrightarrow \arctan(x) = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1$.

8.7 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors on a les équivalences (comme $e^x > 0$)

$$\operatorname{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow X^2 + 1 = 2\sqrt{5}X \Leftrightarrow X^2 - 2\sqrt{5}X + 1 = 0.$$

Il s'agit donc d'une équation du second degré, dont le discriminant est $20 - 4 = 16$, donc les deux solutions de l'équation sont $\frac{2\sqrt{5} \pm 4}{2} = \sqrt{5} \pm 2$. Ces deux quantités sont positives, on a donc l'équivalence $\operatorname{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow e^x = \sqrt{5} \pm 2 \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{5} \pm 2)$. Ainsi, les deux solutions sont $\{\ln(\sqrt{5} - 2); \ln(\sqrt{5} + 2)\}$.

8.7 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors $\operatorname{sh}(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{X - \frac{1}{X}}{2} = 1 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 1 = 0$, de discriminant $4 + 4 = 8$, de solutions $\frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. La seule solution positive est $1 + \sqrt{2}$, donc $\operatorname{sh}(x) = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(1 + \sqrt{2})$.

8.7 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors $\operatorname{th}(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow X^2 - 1 = \frac{1}{3}(X^2 + 1) \Leftrightarrow \frac{2}{3}X^2 - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow X^2 = 2 \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{2}$. Ainsi, la seule solution positive étant $\sqrt{2}$, $\operatorname{th}(x) \Leftrightarrow e^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2)$.

8.7 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = e^x$. Alors $\text{ch}(x) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{X + \frac{1}{X}}{2} \leq 4 \Leftrightarrow X^2 + 1 \leq 8X \Leftrightarrow X^2 - 8X + 1 \leq 0$.

Ce polynôme du second degré a pour discriminant 60 et pour racines $\frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$. Les deux racines sont positives, donc $\text{ch}(x) \leq 4 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{15}e^x \leq 4 + \sqrt{15} \Leftrightarrow \ln(4 - \sqrt{15}) \leq x \leq \ln(4 + \sqrt{15})$. On remarque ensuite que $\frac{1}{4 - \sqrt{15}} = \frac{4 + \sqrt{15}}{(5 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15})} = 4 + \sqrt{15}$.

8.7 e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = e^x$. Alors $\text{sh}(x) \geq 3 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} \leq 6 \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} \leq 6 \Leftrightarrow X^2 - 6X - 1 \leq 0$. Ce trinôme du second degré a pour discriminant 40, et a donc pour racines $\frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$. La première racine est négative, la seconde positive, et $X \geq 0$, donc $\text{sh}(x) \geq 3 \Leftrightarrow e^x \geq 3 + \sqrt{10} \Leftrightarrow x \geq \ln(3 + \sqrt{10})$.

8.7 f) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $X = e^x$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \text{th}(x) \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow X^2 - 1 \leq \frac{X^2 + 1}{2} \Leftrightarrow X^2 - 3 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow X^2 \leq 3 \Leftrightarrow e^{2x} \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \ln(3). \end{aligned}$$

8.8 a) On n'oublie pas que $2^x = e^{x \ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2) \cdot 2^x$.

8.8 c) On écrit que $x^x = e^{x \ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)e^{x \ln(x)}$.

8.8 d) On dérive un quotient : en notant f la fonction et si $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arccos(x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin(x)}{\arccos(x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2} \arccos(x)^2}.$$

8.9 a) On dérive une composée $x \mapsto 2x \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

8.9 c) Il s'agit de dériver th :

$$\text{th}'(x) = \frac{\text{ch}(x)\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)^2} = \frac{\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2}{\text{ch}(x)^2} = 1 - \frac{\text{sh}(x)^2}{\text{ch}(x)^2} = 1 - \text{th}(x)^2.$$

La suite se dérive comme la dérivée d'une composée.

8.10 a) La fonction est dérivable sur $] -1, 1[$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

8.10 b) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$.

8.11 a) Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de cette fonction est $x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x F'(x^x) = (\ln(x) + 1)x^x e^{-(x^x)^2} = (\ln(x) + 1)x^x e^{-x^{2x}}$.

8.11 b) Il s'agit de dériver une composée. La dérivée de $x \mapsto \ln(\text{ch}(x))$ est $x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \text{th}(x)$.

Donc, la dérivée de $x \mapsto F(\sqrt{\ln(\text{ch}(x))})$ est

$$x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \frac{1}{2\sqrt{\ln(\text{ch}(x))}} e^{-\ln(\text{ch}(x))} = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)^2} \frac{1}{2\sqrt{\ln(\text{ch}(x))}}$$