

TD n° 6.

Fonctions usuelles.

Applications directes du cours

Exercice 1 Calculez

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right), \quad \arccos\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{7}\right)\right), \quad \arccos(\cos(4\pi)), \quad \arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{9\pi}{7}\right)\right), \quad \arcsin\left(\sin\left(-\frac{13\pi}{5}\right)\right), \quad \arctan\left(\tan\left(\frac{17\pi}{7}\right)\right).$$

Exercice 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminez des formules similaires aux formules trigonométriques pour les expressions

$$\operatorname{sh}(2x), \quad \operatorname{sh}^2(x), \quad \operatorname{ch}^2(x),$$

et exprimez $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{th}(x)$ en fonction de $t = \operatorname{th}(x/2)$.

Exercice 3 Étudiez la dérivabilité et donnez la dérivée des fonctions suivantes (sur leur domaine de dérivabilité) :

$$1. f_1(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}};$$

$$4. f_4(x) = \arctan(\operatorname{sh} x)$$

$$2. f_2(x) = \frac{x^a}{a^x}, \quad a > 0;$$

$$5. f_5(x) = \operatorname{th} x - \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x;$$

$$3. f_3(x) = (\cos x)^{\sin x};$$

$$6. f_6(x) = \arcsin(\operatorname{th} x);$$

Exercice 4 1. Montrez que, pour tout $x \geq 0$, on a $\operatorname{sh}(x) \geq x$.

2. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(x) \geq 1 + x^2/2$.

Exercices classiques

Exercice 5 Étudiez les fonctions $x \mapsto |x \ln |x||$ et $x \mapsto \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$. Montrez que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle que l'on précisera, et déterminez l'expression de f^{-1} .

Exercice 7 Étudiez les limites suivantes (on pourra dans certains cas faire appel aux taux d'accroissement) :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x^2}}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2 \right).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - \cos(x)}{x^2}.$$

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1. 5\operatorname{ch}(x) - 3\operatorname{sh}(x) = 4.$$

$$2. \arccos(x) = 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right).$$

$$3. \arccos(x) = \arccos(1/4) + \arccos(1/3).$$

$$4. \arccos(x) = \arccos(1/4) + 2 \arccos(1/3).$$

$$5. \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 9 Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$2 \ln(x) + \ln(2x-1) = \ln(2x+8) + 2 \ln(x-1),$$

$$\sqrt{x+4-4\sqrt{x}} + \sqrt{x+9-6\sqrt{x}} = 1.$$

Exercice 10 Calculez

$$\sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{13-5\sqrt{17}}{2}}.$$

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$$2^x + \dots + 2^{x+n} = 3^x + \dots + 3^{x+n}.$$

Exercice 12 Donnez les domaines de définition puis simplifiez les expressions suivantes :

$$1. \ln \left(\sqrt{\frac{1+\operatorname{th}(x)}{1-\operatorname{th}(x)}} \right);$$

$$2. \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right);$$

$$3. \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right).$$

Exercice 13 Montrez que

$$\forall x \in [0, 1], \quad \arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin(2x-1).$$

Exercice 14 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (d'inconnue x) :

$$1. \arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4};$$

2. $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2};$

Exercice 15 Simplifiez l'expression suivante :

$$\arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x)) + \frac{1}{6} \arccos(\cos(3x)),$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercices classiques*

Exercice 16 (Formule de Machin) Montrez que

$$4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 18 Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que

$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)\right)$$

soit bien défini. Montrez que

$$\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{y}{2}\right), \quad \operatorname{th}(x) = \sin(y), \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{1}{\cos(y)}.$$

Exercice 19 Montrez que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \neq 1$, on a

$$\arctan(y) + \arctan(x) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi,$$

où $k = 0$ si $xy < 1$, $k = 1$ si $xy > 1$ avec $x, y > 0$ et $k = -1$ si $xy > 1$ et $x, y < 0$.

Exercice 20 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculez

$$\sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a + kb) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(a + kb).$$

Exercices*

Exercice 21 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, simplifiez

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-n} \operatorname{th}(2^k x).$$

En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

Exercice 22 Étudiez et tracez la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos(4x^3 - 3x).$$

Exercice 23 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = e^{\text{sh}(x)} - x - 1$, et pour $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=n}^{np} \text{sh}\left(\frac{1}{p}\right)$.

1. Montrez que l'équation $2\text{sh}(x) + 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution.
2. Montrez que, pour tout réel x , $\text{ch}^2(x) + \text{sh}(x) \geq 0$.
3. Étudiez les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrez que, pour tout $x \in]0, 1[$, $1 + x \leq e^{\text{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$.
5. En déduire que : $\forall n \geq 2$, $\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$.
6. Déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.