

**Problème n°1 : CCINP 2025 PSI (extrait)**

**Q1.** Loi de Fourier : en notant  $\vec{j}_{cd}$  le vecteur densité de flux thermique conductif (de norme en  $W \cdot m^{-2}$ ), et  $\lambda$  la conductivité thermique du milieu (en  $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$ ), et  $T$  la température (en K) :  $\vec{j}_{cd} = -\lambda \text{grad } T$ .

L

**Q2.** On est ici dans un problème 1D, avec  $x$  comme seule variable spatiale. On applique le premier principe de la thermodynamique à la tranche de matière située entre  $x$  et  $x + dx$ , sur une durée allant de  $t$  à  $t + dt$ , sachant qu'il n'y a pas de terme de source thermique.

En notant  $u$  l'énergie interne massique, et en négligeant la dilatation, donc le travail mécanique :

$$\rho S_0 dx u(x, t + dt) - \rho S_0 dx u(x, t) = \iint_{S_0} j_{cd}(x, t) \vec{e}_x \cdot dS \vec{e}_x dt - \iint_{S_0} j_{cd}(x + dx, t) \vec{e}_x \cdot dS \vec{e}_x dt$$

C'est-à-dire  $\rho S_0 dx (u(x, t + dt) - u(x, t)) = S_0 (j_{cd}(x, t) - j_{cd}(x + dx, t)) dt$ .

En divisant par  $S_0 dx dt$ , avec  $dx$  et  $dt$  tendant vers 0,  $\frac{\partial j_{cd}}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ .

Et en introduisant  $c$ ,  $\frac{\partial j_{cd}}{\partial x} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ .

Et d'après la loi de Fourier,  $j_{cd} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ .

En combinant les deux dernières équations, on obtient l'équation de la diffusion thermique :  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

**Q3.** En régime stationnaire,  $T(x, t) = T(x)$  et l'équation devient :  $\frac{d^2 T}{dx^2}(x) = 0$ .

Dont la solution est de la forme  $T(x) = \alpha x + \beta$ .

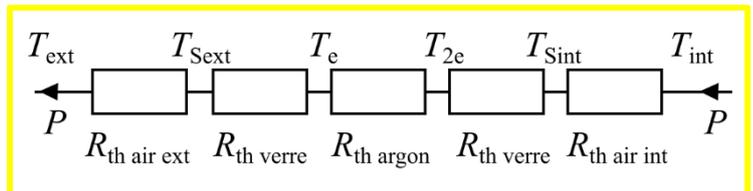
Compte tenu des conditions aux limites, il vient  $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e_0} x + T_1$ .

**Q4.** Le flux thermique traversant la paroi dans le sens des  $x$  croissant est de même valeur pour tout  $x$  et vaut :  $\phi = \iint_{S_0} j_{cd} \vec{e}_x \cdot dS \vec{e}_x$ , d'où  $\phi = \iint_{S_0} j_{cd} dS = j_{cd} \iint_{S_0} dS = j_{cd} S_0$ , donc  $\phi = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{e_0} S_0$ , que l'on peut écrire :

$$\phi = \lambda \frac{T_1 - T_2}{e_0} S_0 \quad \text{On en déduit la résistance thermique } R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{e_0}{\lambda S_0}.$$

**Q5.** Curieux, il manque des températures dans la liste de l'énoncé. Appelons-les  $T_e$  et  $T_{2e}$ , l'indice désignant les abscisses associées.

Puisque la température est plus faible à l'extérieur, le flux thermique va s'écouler de l'intérieur vers l'extérieur. Et puisqu'il n'y a pas de terme de création dans la double vitre, et puisqu'on est en régime stationnaire, on a le même flux thermique tout le long de l'axe des  $x$ . Notons  $P$  ce flux thermique (qui est une puissance), orienté de l'intérieur vers l'extérieur, donc dans le sens des  $x$  décroissants :



Compte tenu de la loi de Newton, rappelée dans l'énoncé, on peut écrire :

$$R_{th \text{ air ext}} = \frac{1}{h_e S_f}; \quad R_{th \text{ air int}} = \frac{1}{h_i S_f}; \quad R_{th \text{ verre}} = \frac{e}{\lambda_V S_f}; \quad R_{th \text{ argon}} = \frac{e}{\lambda_{Ar} S_f}.$$

**Q6.** Le bon profil est le **profil b**. On disait dans l'énoncé « sans justification », mais on peut quand-même en ajouter une : le verre étant bien meilleur conducteur thermique, il y a peu de différence de température entre ses deux faces (de même que la différence de potentiel aux bornes d'un fil, bon conducteur électrique, est quasi-nulle). Et il est impossible que la température décroisse puis croisse.

**Q7.** En régime stationnaire (c'est-à-dire une fois la température de la pièce stabilisée), la puissance du chauffage est exactement compensée par la puissance des pertes thermiques (si ce n'était pas le cas, la température de la pièce varierait), d'où :  $T_{fin} - T_{ext} = R_1 P$ , puis  $R_1 = \frac{T_{fin} - T_{ext}}{P}$ . Numériquement,  $R_1 = \frac{20}{500} = 0,0400 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

**Q8.** On applique le premier principe à la pièce, entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$C dT = P dt - \frac{T - T_{ext}}{R_1} dt, \text{ d'où l'équation différentielle : } C \frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_1} = P + \frac{T_{ext}}{R_1}.$$

Et d'après la question précédente, on peut encore écrire :  $C \frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_1} = \frac{T_{fin}}{R_1}$ , et même  $\frac{dT}{dt} + \frac{T}{CR_1} = \frac{T_{fin}}{CR_1}$ .

On résout :  $T(t) = T_{fin} + K \exp\left(-\frac{t}{R_1 C}\right)$ . La température initiale était  $T_{ext}$ , d'où  $T_{ext} = T_{fin} + K$ .

Finalement,  $T(t) = T_{fin} + (T_{ext} - T_{fin}) \exp\left(-\frac{t}{R_1 C}\right)$ .

Q9. On est en 1D pour le plafond, d'où  $R_{pl} = \frac{e_p}{\lambda_p S_p}$ . Numériquement,  $R_{pl} = \frac{0,05}{0,1 \times 10} = 0,05 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

L'ensemble mur-fenêtre est « en parallèle » avec le plafond, puisque soumis à une même différence de température, et les flux thermiques des deux entités s'ajoutent. D'où  $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{mf}} + \frac{1}{R_{pl}}$ , puis  $R_{mf} = \frac{R_{pl} R_1}{R_{pl} - R_1}$ .

Numériquement,  $R_{mf} = \frac{0,05 \times 0,04}{0,05 - 0,04} = 0,2 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ .

Puisque  $R_{mf} > R_{pl}$ , les déperditions thermiques sont plus importantes par le plafond.

Q10. Les deux couches sont « en série », d'où  $R'_{pl} = R_{pl} + \frac{e_{isol}}{\lambda_{isol} S_p}$ .

Grâce à cette isolation du plafond, les pertes thermiques sont passées de  $P_{pertes} = \frac{T_{fin} - T_{ext}}{R_1}$  à  $P'_{pertes} = \frac{T_{fin} - T_{ext}}{R_2}$ .

Le rapport des nouvelles pertes sur les anciennes est  $\frac{P'_{pertes}}{P_{pertes}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{0,04}{0,12}$ . On a donc divisé les pertes par 3.

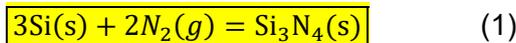
## Problème n°2 : e3a 2016 MP

## Production du nitrure de silicium

1. L'enthalpie  $H$  d'un système est la somme de son énergie interne et du produit pression x volume :

$H = U + PV$ . L'enthalpie de réaction est  $\Delta_r H = \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{T,P}$ .

2. Réaction de synthèse de  $\text{Si}_3\text{N}_4$ , notée (1), avec les nombres stœchiométriques entiers les plus petits possibles :



3. D'après la loi de Hess,  $\Delta_r H^0 = -3\Delta_f H^0(\text{Si}, s) - 2\Delta_f H^0(\text{N}_2, g) + \Delta_f H^0(\text{Si}_3\text{N}_4, s)$

4.  $\Delta_f H^0 = 0$  pour  $\text{Si}(s)$  et de  $\text{N}_2(g)$  car ce sont deux corps simples dans leur état standard de référence.

5.  $\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{Si}_3\text{N}_4, s) = -744 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

6. La réaction est donc exothermique puisque  $\Delta_r H^0 < 0$ .

7. C'est l'approximation d'Ellingham qui consiste à supposer  $\Delta_r H^0$  indépendant de la température.

8. On applique le premier principe de la thermodynamique au système chimique sur la durée totale de la transformation, qui est isobare :  $\Delta H = Q$ .

Et pour une réaction isotherme et isobare,  $\Delta_r H (\xi_f - 0) = Q$ , d'où  $Q \approx \Delta_r H^0 \xi_f$ .

9. On considère l'état 1 suivant, à  $T = 298 \text{ K}$  et  $P^0$  :

- $3n$  moles de silicium solide ;
- $2n$  moles de diazote gazeux ;

On considère l'état fictif suivant, à  $T = 298 \text{ K}$  et  $P^0$  :

démarche, bien expliquée (températures et pressions, 3 états)

- $n$  moles de nitrure de silicium solide ;

On considère l'état 2 suivant, à  $T_f$  et  $P^0$  :

- $n$  moles de nitrure de silicium solide ;

En appliquant le premier principe au système réactionnel entre les états 1 et 2 (mais en passant par l'état fictif intermédiaire), on a :

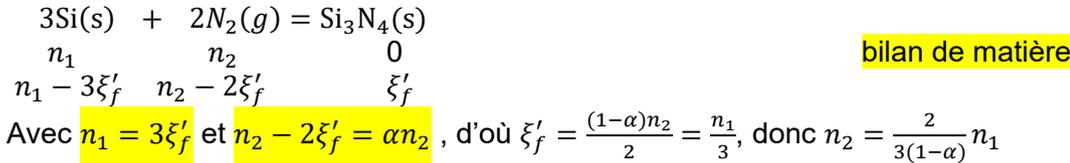
$$\Delta H_{1 \rightarrow 2} = Q = 0, \text{ d'où } \Delta_r H^0 \times (n - 0) + n C_p^0(\text{Si}_3\text{N}_4, s) \times (T_f - T) = 0.$$

$$\text{Il vient } T_f = T - \frac{\Delta_r H^0}{C_p^0(\text{Si}_3\text{N}_4, s)}. \text{ Numériquement, } T_f = 298 + \frac{744 \cdot 10^3}{95,0} = 8,13 \cdot 10^3 \text{ K}.$$

En pratique, cette température ne peut pas être atteinte car :

- La transformation n'est pas réellement adiabatique ;
- La réaction n'est pas totale.
- Les proportions ne sont jamais rigoureusement stœchiométriques.

**10.** Si en fin de réaction, il reste  $\alpha = 10\%$  de la quantité de matière initiale de diazote, le bilan de matière est :



Et le calcul devient :

On considère l'état 1 suivant, à  $T = 298 \text{ K}$  et  $P^0$  :

- $n_1$  moles de silicium solide ;
- $\frac{2}{3(1-\alpha)} n_1$  moles de diazote gazeux ;

On considère l'état fictif suivant, à  $T = 298 \text{ K}$  et  $P^0$  :

- $\frac{n_1}{3}$  moles de nitrure de silicium solide ;
- $\frac{2\alpha}{3(1-\alpha)} n_1$  moles de diazote gazeux ;

démarche, bien expliquée

On considère l'état 2 suivant, à  $T'_f$  et  $P^0$  :

- $\frac{n_1}{3}$  moles de nitrure de silicium solide ;
- $\frac{2\alpha}{3(1-\alpha)} n_1$  moles de diazote gazeux ;

$$\Delta H_{1 \rightarrow 2} = Q = 0, \text{ d'où } \Delta_r H^0 \times \left(\frac{n_1}{3} - 0\right) + \frac{n_1}{3} C_p^0(\text{Si}_3\text{N}_4, s) \times (T'_f - T) + \frac{2\alpha}{3(1-\alpha)} n_1 C_p^0(\text{N}_2, g) \times (T'_f - T) = 0.$$

$$\text{Il vient } T'_f = T - \frac{\Delta_r H^0}{C_p^0(\text{Si}_3\text{N}_4, s) + \frac{2\alpha}{(1-\alpha)} C_p^0(\text{N}_2, g)}. \text{ Numériquement, } T'_f = 298 + \frac{744 \cdot 10^3}{95,0 + \frac{2 \times 27,9}{9}} = 7,65 \cdot 10^3 \text{ K}.$$

### Problème n°3 : CC INP 2019 PhCh (extrait)

**Q1.** On voit clairement sur la figure 8 que les deux enveloppes du signal ne se croisent pas (le taux de modulation vérifie  $m < 1$ ). Notons  $V_1$  la valeur maximale de l'enveloppe supérieure  $env_+(t) = U(1 + m \cos(\omega_0 t))$  et  $V_2$  sa valeur minimale.

On a donc :  $V_1 = U(1 + m)$ , et  $V_2 = U(1 - m)$ . D'où  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1-m}{1+m}$ , puis  $m = \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$ .

Or, on lit sur la courbe  $V_1 = 7,0 \text{ V}$  et  $V_2 = 3,0 \text{ V}$ . On en déduit  $m = \frac{7-3}{7+3} = 0,40$ .

De plus, grâce à l'échelle horizontale, on a  $12 \text{ ms} = \frac{2}{f_0}$ , d'où  $f_0 = 0,17 \text{ kHz}$ . Et sur la durée de deux périodes du signal modulant, on compte 19 cycles de la porteuse, donc  $\frac{19}{f_p} = \frac{2}{f_0}$ , puis  $f_p = 1,6 \text{ kHz}$ .

**Q2.** Une analyse dimensionnelle montre aisément que  $k$  est homogène à l'inverse d'une tension, donc  $k$  est en  $V^{-1}$ . Les circuits multiplieurs présentent en général une valeur  $k = 0,10 \text{ V}^{-1}$ .

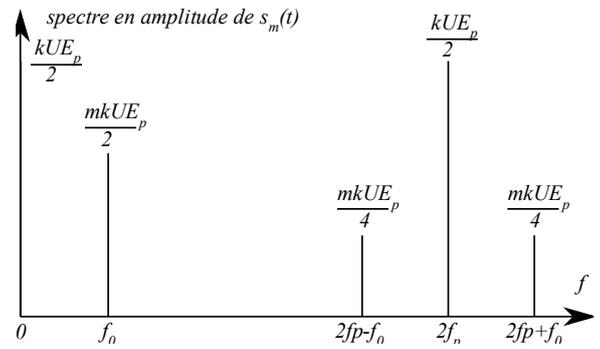
$$\text{Q3. } s_m(t) = kU(1 + m \cos(\omega_0 t)) \cos(\omega_p t) \times E_p \cos(\omega_p t) = \frac{kUE_p}{2} (1 + \cos(2\omega_p t))(1 + m \cos(\omega_0 t)).$$

$$\text{D'où } s_m(t) = \frac{kUE_p}{2} \left[ 1 + \cos(2\omega_p t) + m \cos(\omega_0 t) + \frac{m}{2} \cos((2\omega_p + \omega_0)t) + \frac{m}{2} \cos((2\omega_p - \omega_0)t) \right]$$

Le spectre en amplitude est dessiné ci-après.

**Q4.** On voit bien sur le schéma ci-contre que le signal informatif  $s_{inf}(t)$  (ici très pauvre car limité à une sinusoïde de fréquence  $f_0$ ) a son spectre situé dans le domaine des basses fréquences. Pour le récupérer, on peut donc effectuer un **filtrage passe-bas, avec une fréquence de coupure peu supérieure à  $f_0$**  (donc très petite par rapport à  $2f_p$ ). Et pour éliminer la composante continue, on peut utiliser un filtre **passe-haut de très petite fréquence de coupure (très petite par rapport à  $f_0$ )**.

On pourrait aussi n'utiliser qu'un seul filtre, passe-bande.



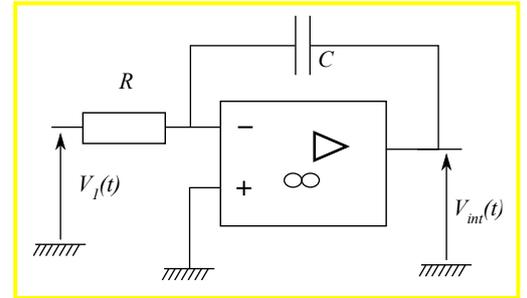
**Q5.** Le montage fait apparaître un **rebouclage de la sortie sur l'entrée inverseuse**; le montage est donc potentiellement stable.

**Q6.** L'ALI étant idéal et en fonctionnement linéaire (cf hypothèses de l'énoncé), on peut écrire  $v^+ = v^-$ . Or, le théorème du pont diviseur de tension donne  $v^+ = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_d$ .

De plus, la loi des nœuds écrite avec les potentiels donne :  $\frac{V_m - v^-}{R_1} = \frac{v^- - V_s}{R_2}$ , d'où  $v^- = \frac{V_m R_2 + V_s R_1}{R_1 + R_2}$ .

On égalise :  $V_s = \frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1(R_3 + R_4)} V_d - \frac{R_2}{R_1} V_m$ . Il suffit de choisir  $R_2 = R_1$  et  $R_4 = R_3$ , pour avoir  $V_s = V_d - V_m$ .

**Q7.** Le montage intégrateur est rappelé ci-contre. L'ALI étant **idéal et en fonctionnement linéaire**,  $v^- = v^+ = 0$ . Et en utilisant le fait que le **courant est le même dans  $R$  et  $C$** , on obtient  $V_{int}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_1(t) dt + V_{int}(0)$ . Or on nous indique dans l'énoncé que  $V_{int}(0) = 0$ , donc  $V_{int}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_1(t) dt$ .



**Q8.** Compte tenu du schéma de la figure 10,

$$V_s(t) = V_{2m} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{2}\right) - k \left(-\frac{1}{RC} \int_0^t V_1(t) dt\right) V_{2m} \cos(\omega_2 t);$$

$$\text{Soit } V_s(t) = V_{2m} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{kV_{2m} V_{1m}}{RC \omega_1} \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t),$$

$$\text{ou encore } V_s(t) = V_{2m} \left[ \sin(\omega_2 t) + \frac{kV_{1m}}{RC \omega_1} \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \right]$$

En développant le sinus dans l'expression de l'énoncé, on obtient

$$V_s(t) = V_{2m} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t)} \left[ \sin(\omega_2 t) \cos(\varphi(t)) + \sin(\varphi(t)) \cos(\omega_2 t) \right]$$

Puisque cette expression doit être égale à la précédente pour tout  $t$ , on peut identifier terme à terme, et on obtient 2 équations :

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t)} \cos(\varphi(t)) = 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t)} \sin(\varphi(t)) = \frac{kV_{1m}}{RC \omega_1} \sin(\omega_1 t) \quad (2).$$

Le rapport des équations (2) et (1) donne  $\tan(\varphi(t)) = \frac{kV_{1m}}{RC \omega_1} \sin(\omega_1 t)$ .

Et en faisant  $(1)^2 + (2)^2$ , on obtient  $1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t) = 1 + \left(\frac{kV_{1m}}{RC \omega_1}\right)^2 \sin^2(\omega_1 t)$ , d'où  $\varepsilon = \pm \frac{kV_{1m}}{RC \omega_1}$ . On peut prendre par exemple le signe +.

**Q9.** Des deux relations obtenues à Q8, on peut déduire  $\tan(\varphi(t)) = \varepsilon \sin(\omega_1 t)$ .

Puisque  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\tan(\varphi(t)) \simeq \varphi(t) \simeq \sin(\varphi(t))$ , et  $\cos(\varphi(t)) \simeq 1$ ,

donc la relation de l'énoncé  $V_s(t) = V_{2m} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t)} \left[ \sin(\omega_2 t + \varphi(t)) \right]$  peut s'écrire

$$V_s(t) \simeq V_{2m} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2(\omega_1 t)} \left[ \sin(\omega_2 t + \varepsilon \sin(\omega_1 t)) \right].$$

Et en se limitant à l'ordre 1 en  $\varepsilon$ , la racine carrée est équivalente à 1, d'où  $V_s(t) \simeq V_{2m} \sin(\omega_2 t + \varepsilon \sin(\omega_1 t))$ , ce qui est la forme proposée par l'énoncé, en posant  $m = \varepsilon = \frac{kV_{1m}}{RC \omega_1}$ .

**Q10.** Selon les notations de l'énoncé,  $\psi(t) = \omega_2 t + \varepsilon \sin(\omega_1 t)$ , et  $\Omega(t) = \frac{d\psi}{dt}(t) = \omega_2 + \varepsilon \omega_1 \cos(\omega_1 t)$ ,

d'où  $\Omega(t) = \omega_2 + \frac{k}{RC} V_{1m} \cos(\omega_1 t) = \omega_2 + \frac{k}{RC} V_1(t)$ . On voit bien que la pulsation instantanée  $\Omega(t)$  de  $V_s(t)$  est **fonction affine de  $V_1(t)$** , ce qui est bien une caractéristique de la modulation de fréquence.