

Devoir Maison n° 1.

Pour le 8 septembre.

Exercice 8 : théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini de cardinal n et H un sous-groupe de G .

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur G par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

est une relation d'équivalence.

2. Montrer que $Hx = \{hx; \text{ avec } h \in H\}$ est la classe d'équivalence de x .
3. Soit $x \in G$ fixé et $f : H \longrightarrow Hx, h \mapsto hx$.
Montrer que f est bijective.
4. Montrer que toutes les classes d'équivalence ont le même cardinal.
5. Montrer que $\text{Card}(H) \mid n$.
6. Montrer que l'ordre de tout élément de G divise le cardinal n du groupe G .

Exercice 10

Les groupes $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ sont-ils isomorphes ?