# Corrigé du DM 2

## Exercice 4

**1.** $32 = 2^5$, donc $\varphi(32) = 16$ et $\varphi(32)$ est le nombre d'inversibles de $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ ; donc

$$\boxed{\mathrm{Card}(G) = 16.}$$

**2.** D'après le théorème de Lagrange, l'ordre de $\overline{5}$ dans $G$ divise le cardinal de $G$, c'est donc une puissance de 2, on teste $\overline{5}^2 = -\overline{7}$, $\overline{5}^4 = \overline{49} = \overline{-15}$, $\overline{5}^8 = \overline{225} = \overline{1}$ ; donc

$$\boxed{\overline{5} \text{ est d'ordre } 8.}$$

De même

$$\boxed{\overline{15} \text{ est d'ordre } 2.}$$

**3.** $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est un groupe produit.

- Montrons que $f$ est bien définie.
  Soit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{c}, \overline{d})$ dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il existe donc $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = c + 8k$ et $b = d + 2k'$. Donc :
  $$\begin{aligned} \overline{5}^a \overline{15}^b &= \overline{5}^c (\overline{5}^8)^k \overline{15}^d (\overline{15}^2)^{k'} \\ &= \overline{5}^c \overline{15}^d \end{aligned}$$
  car $\overline{5}^8 = \overline{1}$ et $\overline{15}^2 = \overline{1}$ d'après la question 2.
  Donc : $f(\overline{a}, \overline{b})$ ne dépend pas du choix du représentant de $\overline{a} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ ni du représentant de $\overline{b} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Donc $f$ est bien définie.
- Soit $(\overline{a}, \overline{b}), (\overline{c}, \overline{d}) \in H$
  $$\begin{aligned} f((\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{c}, \overline{d})) &= \overline{5}^{a+c} \overline{15}^{b+d} \\ &= \overline{5}^a \overline{5}^c \overline{15}^b \overline{15}^d \\ &= f(\overline{a}, \overline{b}) f(\overline{c}, \overline{d}) \end{aligned}$$
  Donc : $f$ est un morphisme de groupes de $H$ dans $G$.
- Soit $(\overline{a}, \overline{b}) \in \mathrm{Ker}\, f$.
  Donc : $\overline{5}^a \overline{15}^b = \overline{1}$
  donc : $\overline{15}^b = \overline{5}^{-a} \in \mathrm{gr}(\overline{5}) \cap \mathrm{gr}(\overline{15})$.
  Or : $\mathrm{gr}(\overline{15}) = \left\{\overline{1}, \overline{15}\right\}$ et $\mathrm{gr}(\overline{5}) = \left\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{-7}, \overline{-3}, \overline{-15}, \overline{-11}, \overline{9}, \overline{13}\right\}$.
  Donc : $\overline{5}^{-a} = 0$, donc 8 divise $-a$, donc dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \overline{a} = \overline{0}$ et de même, dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \overline{b} = \overline{0}$.
  On a montré que $\mathrm{Ker}\, f \subset \{0_H\}$, donc $f$ est injective.
- De plus : $\mathrm{Card}(H) = \mathrm{Card}(G) = 16$, donc :

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme de groupes.}}$$

## Exercice 14

**1.** Soit $x \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, comme 5 est un nombre premier, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un corps, d'où :

$$\begin{aligned} &\bar{3}x + \bar{2} = -\bar{1} \\ \Leftrightarrow\ &\bar{3}x = -\bar{3} \\ \Leftrightarrow\ &x = \bar{-}1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{la solution est : } -\bar{1}.}$$

**2.** Soit $x \in \mathbb{Z}$. Dans le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ :

$$\overline{3x+2} = \overline{-1} \qquad \Leftrightarrow \overline{x} = -\overline{-1}$$

et dans le corps $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $(\overline{3})^{-1} = \overline{5}$ donc :

$$\begin{aligned} &\overline{3x-1} = \overline{3} \\ \Leftrightarrow\ &\overline{3}\overline{x} = \overline{4} \\ \Leftrightarrow\ &\overline{x} = \overline{20} \\ \Leftrightarrow\ &\overline{x} = \overline{-1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x + 2 \equiv -1\ [5] \\ 3x - 1 \equiv 3\ [7] \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases} x \equiv -1\ [5] \\ x \equiv -1\ [7] \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ &x \equiv -1\ [35] \end{aligned}$$

d'après le lemme chinois avec $5 \wedge 7 = 1$. Donc :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \{-1 + 35k;\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}\}.}$$

**3.** Soit $x \in \mathbb{Z}$.
Dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $(\overline{5})^{-1} = \overline{5}$ donc :

$$\begin{aligned} 5x \equiv 8\ [12] &\Leftrightarrow \overline{5}\overline{x} = \overline{8} \text{ dans } \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \overline{x} = \overline{40} \text{ dans } \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \overline{x} = \overline{4} \text{ dans } \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x \equiv 4\ [12] \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 4\ [4] \\ x \equiv 4\ [3] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 0\ [4] \\ x \equiv 1\ [3] \end{cases} \end{aligned}$$

d'après le lemme chinois avec $3 \wedge 4 = 1$.
De plus, dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$, $\overline{2}^{-1} = 11$ donc :

$$\begin{aligned} 2x \equiv 17\ [21] &\Leftrightarrow \overline{x} = \overline{11} \times \overline{-4} \text{ dans } \mathbb{Z}/21\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \overline{x} = \overline{-2} \text{ dans } \mathbb{Z}/21\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -2\ [7] \\ x \equiv -2\ [3] \end{cases} \end{aligned}$$

d'après le lemme chinois avec $3 \wedge 7 = 1$.
Donc :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 5x \equiv 8\ [12] \\ 2x \equiv 17\ [21] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 0\ [4] \\ x \equiv 1\ [3] \\ x \equiv 5\ [7] \\ x \equiv 1\ [3] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 40\ [4] \\ x \equiv 40\ [3] \\ x \equiv 40\ [7] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \equiv 40\ [84] \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est : } \{40 + 84k;\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}\}.}$$