

Exemple d'idéal d'un anneau de suites

Polynômes de Hurwitz

1) Soit α un racine réelle du polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients strictement positifs. Alors en posant d le degré de P , il existe $d+1$ réels $a_k > 0$ (k dans $\llbracket 0; d \rrbracket$) avec

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k.$$

Si $\alpha \geq 0$, alors pour tout k dans $\llbracket 1; d \rrbracket$, par produit de réels positifs, $a_k \alpha^k \geq 0$, et donc $P(\alpha) \geq a_0 > 0$. Dans ce cas, $P(\alpha) \neq 0$ ce qui est incompatible avec α racine de P .

Par disjonction de cas, on a donc $\boxed{\alpha < 0}$.

2) Soit P un polynôme de Hurwitz et R un diviseur de P . Toute racine complexe de R est donc une racine de P (qui est un multiple de R). Or les racines de P sont dans Re^- car P est un polynôme de Hurwitz, donc toute racine complexe de R est dans Re^- ce qui montre que $\boxed{R \text{ est un polynôme de Hurwitz}}$.

3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de Hurwitz irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ à coefficient dominant positif.

Comme P est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$, il est soit de degré 1 soit de degré 2 à discriminant strictement négatif.

* cas $\deg(P) = 1$: il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $P = aX + b$.

Par hypothèse sur le coefficient dominant $a > 0$ (positif et non nul) donc la racine $-b/a$ de P est dans Re^- car P est un polynôme de Hurwitz. Donc $\underline{a > 0}$ et $-b/a < 0$ d'où $b \geq 0$.

* cas $\deg(P) = 2$: il existe $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ avec $P = aX^2 + bX + c$.

Par hypothèse sur le coefficient dominant, on sait $\underline{a > 0}$ (positif et non nul); l'irréductibilité de P assure aussi $b^2 - 4ac < 0$, donc P admet deux racines complexes (non réelles) conjuguées z et $\bar{z}$ avec $z \in \text{Re}^-$ (car P de Hurwitz). Ainsi par le lien coefficients racines, on trouve : $b = -a(z + \bar{z}) = -2a\text{Re}(z) < 0$ et $c = a|z|^2 > 0$ car $|z| > 0$ puisque $z \neq 0$ car non réel.

* Ainsi dans tous les cas, on a prouvé que $\boxed{P \text{ est à coefficients strictement positifs}}$.

4) On suppose $n = 2$ et Q à coefficients strictement positifs.

* cas où P est à racines réelles.

Alors les complexes z_1 et z_2 sont en fait réels (racines de P) donc via Q1, les racines réelles $2z_1$ et $2z_2$ de Q vérifient $2z_1 < 0$ et $2z_2 < 0$ donc $z_1 < 0$ et $z_2 < 0$ ce qui prouve que P est un polynôme de Hurwitz dans ce cas.

* cas où P admet des racines non réelles.

Comme P est de degré à coefficients réels, P admet deux racines complexes non réelles conjuguées z et $\bar{z}$.

Alors $Q = (X - 2z)(X - 2\bar{z})(X - z - \bar{z})^2 = (X - 2z)(X - 2\bar{z})(X - 2\text{Re}(z))^2$
Donc comme Q est à coefficients strictement positifs, sa racine réelle $2\text{Re}(z)$ est strictement négative (cf Q1). Donc $\text{Re}(z) < 0$ et $\text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z) < 0$, ce qui signifie que les racines de P sont dans Re^- donc que P est un polynôme de Hurwitz.

* Dans tous les cas, $\boxed{P \text{ est un polynôme de Hurwitz}}$.

5) Comme A et B sont des polynômes à coefficients strictement positifs, on peut écrire à l'aide de leurs degrés respectifs α et β :

$$\exists (a_k)_{k \in \llbracket 0; \alpha \rrbracket} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\alpha+1}, \quad \exists (a_k)_{k \in \llbracket 0; \beta \rrbracket} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\beta+1}, \quad \text{avec } A = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k X^k \text{ et } B =$$

$$\sum_{k=0}^{\beta} b_k X^k$$

alors en posant : $\forall k \in \llbracket 0; \alpha + \beta \rrbracket \quad c_k = \sum_{\ell=m_k}^{M_k} a_{\ell} b_{k-\ell}$ où $m_k = \max(0; k - \beta) \in \mathbb{N}$ et

$$M_k = \max(k; \alpha)$$

$$\text{on a } AB = \sum_{k=0}^{\alpha+\beta} c_k X^k.$$

Par somme de produit de réels strictement positifs, on a $c_k > 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; \alpha + \beta \rrbracket$.

Ainsi $\boxed{AB \text{ est à coefficients strictement positifs}}$.

6) • Supposons que P est un polynôme de Hurwitz.

Alors ses racines z_k (pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$) sont dans Re^- i.e. $(z_k) < 0$. Les racines de Q sont les $z_k + z_{\ell}$ avec $(k; \ell) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, et on a toujours $\text{Re}(z_k + z_{\ell}) = \text{Re}(z_k) + \text{Re}(z_{\ell}) < 0$ donc Q est aussi de Hurwitz.

Montrons qu'un polynôme (de $\mathbb{R}[X]$) de Hurwitz unitaire est à coefficients strictement positifs ce qui prouvera ici que $\boxed{P \text{ et } Q \text{ sont à coefficients strictement positifs}}$.

Soit donc R un polynôme (de $\mathbb{R}[X]$) de Hurwitz unitaire. On l'écrit comme produit de polynômes irréductibles unitaire de $\mathbb{R}[X]$:

$$R = \prod_{\ell=1}^d R_{\ell} \text{ avec } d \in \mathbb{N}^* \text{ et } R_{\ell} \text{ irréductible unitaire de } \mathbb{R}[X] \text{ pour tout } \ell \in \llbracket 1; d \rrbracket.$$

Pour tout $\ell \in \llbracket 1; d \rrbracket$, comme R_{ℓ} divise le polynôme de Hurwitz, R_{ℓ} est aussi de Hurwitz (via Q2) donc via Q3, est à coefficients strictement positifs. Par produit (récurrence et Q5), le polynôme R est donc bien à coefficients strictement positifs.

• Supposons P et Q à coefficient strictement positifs.

Soit z une racine complexe de P . Alors

- si z est un réel, la question Q1 prouve $z < 0$ donc $z \in \text{Re}^-$,

- sinon z est un complexe non réel, racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $\bar{z}$ est aussi racine de P et $z \neq \bar{z}$ (z non réel). Ainsi par définition de Q , $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ est racine réelle de Q . Via Q1, comme Q est à coefficients strictement positifs, $2\text{Re}(z) < 0$ i.e. $\text{Re}(z) < 0$ ou encore $z \in \text{Re}^-$,

Ainsi $\boxed{P \text{ est un polynôme de Hurwitz}}$

Par double implication, on a bien prouvé

$P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de Hurwitz si et seulement si P et Q sont à coefficients strictement positifs

(en fait la condition sur Q suffit).