Devoir Maison n° 4.
Pour le 29 septembre.

Exercice 7

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r, décomposée par blocs sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tout vecteur colonne $Y \in \mathbb{K}^{n-r}$, il existe un vecteur colonne $X \in \mathbb{K}^r$ tel que :

$$M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $D = CA^{-1}B$.

Exercice 18 (CCINP 85)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

- **a)** Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
- **b)** Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
  a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.

2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.