Corrigé du DM 4

Exercice 7

1. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^r & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r}\end{pmatrix}\end{array}$$

donc $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^n)$.
Soit $X \in \operatorname{Ker} g$, donc $\begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_r \\ 0_{n-r}\end{pmatrix}$, donc $AX = 0_r$; or $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$, donc $X = 0_r$.
On a montré que $\operatorname{Ker} g \subset \{0_r\}$ donc, d'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(g) = \dim \mathbb{K}^r = r$, donc $\dim(\operatorname{Im} g) = r$.
De plus, $\operatorname{Im} g = \left\{ M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r}\end{pmatrix} ;\ \text{avec } X \in \mathbb{K}^r \right\} \subset \operatorname{Im} f$ et $\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A) = r = \dim(\operatorname{Im} g)$; donc : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.
Soit $Y \in \mathbb{K}^{n-r}$; donc $M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$, donc il existe $X \in \mathbb{K}^r$ tel que $M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y\end{pmatrix} = g(X) = M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r}\end{pmatrix}$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{pour tout vecteur colonne } Y \in \mathbb{K}^{n-r}, \text{ il existe un vecteur colonne } X \in \mathbb{K}^r \text{ tel que : } M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r}\end{pmatrix}.}$$

2. Soit $Y \in \mathbb{K}^{n-r}$ et X donné par la question précédente. Donc : $\begin{pmatrix} BY \\ DY\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ CX\end{pmatrix}$, donc : $BY = AX$ donc $A^{-1}BY = X$ et $DY = CX$, donc : $DY = CA^{-1}BY$.
Donc $(D - CA^{-1}B)Y = 0_{n-r}$ valable pour tout $Y \in \mathbb{K}^{n-r}$, donc $\operatorname{Ker}(D - CA^{-1}B) = \mathbb{K}^{n-r}$, donc :

$$\boxed{D = CA^{-1}B.}$$

Exercice 18 (CCINP 85)

1. a) $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$

b)

$$\begin{aligned}
& a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P \\
\iff\ & \exists Q \in \mathbb{R}_{n-r}[X] \text{ tel que } Q(a) \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r Q \\
\iff\ & \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^i \\
\iff\ & \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^{r+i} \\
\iff\ & \exists (q_0, \dots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{k=r}^{n} q_{k-r} (X-a)^k
\end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor (rappelée ci-dessus) et l'unicité de la décomposition de P dans la base $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ il vient enfin :

a est une racine d'ordre r de $P \iff \forall k \in \{0, \dots, r-1\}\ \ P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
1 \text{ est racine double de } P = X^5 + aX^2 + bX \iff\ & P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P''(1) \neq 0 \\
\iff\ & \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{cases} \\
\iff\ & a = -4 \text{ et } b = 3
\end{aligned}$$

On obtient $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X-1)^2(X^2 + 2X + 3)$ et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de $X^2 + 2X + 3$ est strictement négatif.