

Devoir Maison n° 6.

Pour le 3 novembre.

Problème

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Par la suite, n désigne un entier naturel, $n \geq 2$.

Partie I - Étude de quelques exemples

Q1. Justifier que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

Q2. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même déterminant, le même rang et le même polynôme caractéristique.

Ces deux matrices sont-elles semblables ? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable).

Ont-elles le même polynôme minimal ?

Q3. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :

première méthode : en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E ;

deuxième méthode : en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ .

Q4. Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A .

Q5. Application : soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $uou \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.

On pourra calculer U^2 .

Q6. Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

Q7. On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont deux nombres complexes non nuls,

différents et non opposés.

Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A .

Justifier que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont aussi valeurs propres de A .

Préciser une base de vecteurs propres de A .

Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de la matrice A .

Q8. Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ , les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

Partie II - Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

Q9. Démontrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q10. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $R + xS$ soit inversible.

Q11. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q12. Application : démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie III

On s'intéresse dans cette question à la proposition P_n :

« Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».

Q13. En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, démontrer que la proposition P_n est vraie pour $n = 2$.

On admet qu'elle l'est également pour $n = 3$.

Q14. Démontrer que la proposition P_n est fausse pour $n = 4$. On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.