

Exercices

Exercice 1.

1. Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + 4y^2 - 8y \leq 11\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. On munit $\mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\Phi : \mathcal{C}([0; \pi], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f \mapsto \int_0^\pi f(t) \cos(t) dt$$

1. Montrer que l'application Φ est continue.
2. Déterminer $\|\Phi\|$.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f \geq 1 \right\}.$$

1. Montrer que A est une partie fermée de E .
2. Montrer que : $\forall f \in A, \|f\| > 1$.
3. Déterminer $d(0, A)$.

Exercice 4. On munit $\mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$.

L'application $\varphi : \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$ est-elle continue ?

Exercice 5. On note ℓ^∞ l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$, et on considère l'opérateur de différence $\Delta : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ défini par $\Delta(x) = y$ où $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - x_n$.

1. Montrer que Δ est linéaire et continue.
2. Déterminer $\|\Delta\|$.

Exercice 6. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ avec } x = \frac{p}{q} \text{ irréductible, } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

En quels points h est-elle continue ?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq \frac{1}{2}\}.$$

Est-ce que A est compacte ? Est-ce que B est compacte ?

Exercice 8. Soit A, B des parties d'un espace vectoriel normé E .

1. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.
Indication : considérer $f : E \times E \rightarrow E, (x, y) \mapsto x + y$ et $f(A \times B)$.
2. Montrer que si A est fermée et B est compacte, alors $A + B$ est fermée.
Indication : utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.
3. A-t-on l'implication : A et B fermés $\Rightarrow A + B$ fermé ?
Indication : considérer dans $\mathbb{R}^2$ l'axe des abscisses et le graphe de la fonction exponentielle.

Exercice 9.

1. Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^\top \times A$ est continue.
2. Montrer que le groupe orthogonal $O_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top \times A = I_n\}$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente, ℓ sa limite et $A = \{u_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$. Montrer que A est compacte.

Exercice 11. Soit

$$\begin{array}{lll} N_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto & \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lll} N_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto & \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \end{array}$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $N_i(A \times B) \leq N_i(A) \times N_i(B)$ pour $i \in \{1, 2\}$.

$$3. \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}. \text{ La suite } (A^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa}$$

limite ?

Indication : on calculera $\|A\|$ en choisissant bien la norme.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite B . Montrer que les seules valeurs propres éventuelles de B sont 0 et 1, que A et B commutent et que B est diagonalisable.

Exercice 13. Soit $E = \mathbb{C}[X]$ muni de la norme définie par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X], \|P\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$$

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. L'application $P \mapsto P(X+1)$ est-elle continue ?

Exercice 14.

1. (a) Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ n'est pas un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
(b) Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
(c) Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Indication : utiliser la trigonalisation.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
(a) Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
(b) En utilisant la densité, en déduire que le résultat reste vrai pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\text{Com}(A)$ la comatrice de A .
(a) Montrer que :

$$\forall A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \text{Com}(A \times B) = \text{Com}(A) \times \text{Com}(B).$$

Indication : utiliser $M \times \text{Com} M^\top = \det(M) I_n$.

- (b) En déduire que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{Com}(A \times B) = \text{Com}(A) \times \text{Com}(B).$$

4. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
2. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel normé dont la boule unité fermée est compacte. L'objectif de cet exercice est de montrer que E est de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe un nombre fini de points $x_1, \dots, x_n \in B_f(0, 1)$ tels que :

$$\forall x \in B_f(0, 1), \exists k \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \|x - x_k\| < \frac{1}{2}.$$

Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

2. On pose $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$; soit $x \in E$.
Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exists y_k \in F, u_k \in E \mid x = y_k + \frac{1}{2^{k+1}} u_k$ et $\|u_k\| < 1$.
3. En déduire que $x \in F$.
4. Conclure.

Banque CCINP

Exercice 17 (CCINP 1). On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

$$(a) \text{ Soit } u : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto f(0) \end{cases}$$

Prouver que u est une application continue sur E .

$$(b) \text{ On pose } F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}.$$

Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.

$$\text{Soit } c : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1 \end{cases}$$

$$\text{On pose : } \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$(a) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Calculer } \|f_n - c\|_1.$$

$$(b) \text{ On pose } F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}.$$

On note $\bar{F}$ l'adhérence de F .

Prouver que $c \in \bar{F}$

F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice 18 (CCINP 37). On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E, N_\infty(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E .
 (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E , $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.
 (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞ .
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 19 (CCINP 38).

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\| \cdot \|_1$ définie par : $\forall f \in E$,

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

$$\text{Soit } u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array} \text{ avec } \forall x \in [0, 1], g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On admet que u est un endomorphisme de E .

Prouver que u est continue et calculer $\|u\|$.

Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = ne^{-nt}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n -uplet **non nul, fixé**.

$$\text{Soit } u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array}.$$

- (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.

- (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $\| \cdot \|_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

Calculer $\|u\|$.

3. Déterminer un espace vectoriel E , une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.