

Corrigé du DS 2

Exercice : Matrices de rang 1 (CCINP 2025 maths 2 Problème partie 2)

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

Q1. On note $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A . Or A est de rang 1, donc toutes les colonnes de A sont proportionnelles à C . On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A , donc pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $C_i = \lambda_i C$. Donc, pour $L = (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n)$:

$$C \times L = (\lambda_1 C | \lambda_2 C | \dots | \lambda_n C) = A.$$

Et L est non nulle car A est non nulle.

Donc

il existe une matrice ligne $L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.

Q2. On note $L = (\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n)$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Donc pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $a_{i,j} =$

$c_i \lambda_j$. Donc :

$$L \times C = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \text{tr}(A).$$

Et :

$$A^2 = (C \times L) \times (C \times L) = C \times (L \times C) \times L = \text{tr}(A) C \times L = \text{tr}(A) A.$$

Donc :

$$L \times C = \text{tr}(A) \text{ et } A^2 = \text{tr}(A) A.$$

Q3. $A^2 = \text{tr}(A) A$, donc $P = X^2 - \text{tr}(A) X = X(X - \text{tr}(A))$ est un polynôme annulateur de A . Donc le polynôme minimal μ_A de A divise P , or $X(A) = A \neq 0$ car A est de rang 1 (et pas de rang 0), et $(X - \text{tr}(A))(A) = A - \text{tr}(A) I_n$ et $\text{tr}(A) I_n$ est de rang 0 (si $\text{tr}(A) = 0$) ou de rang n (sinon) ; donc $A \neq \text{tr}(A) I_n$, c'est à dire $A - \text{tr}(A) I_n \neq 0$. Donc : $\mu_A = X(X - \text{tr}(A))$.

De plus, $\text{rg}(A) = 1$ donc, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker } A) = n - 1.$$

Donc : 0 est une valeur propre de A et la dimension de son sous-espace propre est $n - 1$, donc 0 est une valeur propre d'ordre au moins $n - 1$; donc X^{n-1} divise χ_A et $\deg(\chi_A) = n$; donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda) = X^n - \lambda X^{n-1}$. De plus $\chi_A = X^n - \text{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$. Donc $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{tr}(A))$.

Conclusion :

$$\mu_A = X(X - \text{tr}(A)) \text{ et } \chi_A = X^{n-1}(X - \text{tr}(A)).$$

Q4.

A est diagonalisable $\Leftrightarrow \mu_A$ est simplement scindé

$\Leftrightarrow X(X - \text{tr}(A))$ est simplement scindé

$\Leftrightarrow \text{tr}(A) \neq 0$.

Donc :

$$A \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \text{Tr}(A) \neq 0.$$

On note désormais u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

Q5. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Donc $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)) \neq 0$, donc $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)) \geq 1$. Or $\text{rg}(A) = 1$, donc $\dim(\text{Im}(u)) = 1$ et $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \subset \text{Im}(u)$. Donc $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)) = 1$ et $\text{Im}(u) = \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u)$.

Donc

$$\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u).$$

On sait que $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = 1$ donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u)) = n - 1$. Donc, il existe un complémentaire V de $\text{Ker}(u)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\dim(V) = 1$, soit (e_1) une base de V .

On pose $e_2 = u(e_1)$, donc $e_2 \in \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et $e_1 \in V \setminus \{0\}$ et $V \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$, donc $e_1 \notin \text{Ker}(u)$ et $e_2 = u(e_1) \neq 0$. Donc (e_2) est une famille libre de $\text{Ker}(u)$ et d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_3, \dots, e_n \in \text{Ker}(u)$ tels que $(e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\text{Ker}(u)$. Ainsi $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $V \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^n$ avec $u(e_1) = e_2$ et $\forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket, u(e_k) = 0$. Donc,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u)$ et il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Q6. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = n$, donc : $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = \mathbb{R}^n$.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à $\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) = \mathbb{R}^n$, or $\dim(\text{Im}(u)) = 1$, donc $\text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1)$ et : $\forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket, u(e_i) = 0$.

De plus $u(e_1) \in \text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1)$, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_1) = ae_1$ et $e_1 \in \text{Im}(u) \setminus \{0\}$ et $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$, donc $u(e_1) \neq 0$. Ainsi

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul.

Q7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(A) = 1$.

1er cas : $\text{Im}(A) \cap \text{Ker}(A) \neq \{0\}$

donc d'après la question **Q5**, A est semblable à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et $\text{tr}(A) = 0$.

2e cas : sinon $(\text{Im}(A) \cap \text{Ker}(A) = \{0\})$

donc d'après la question **Q6**, il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que A est semblable à la matrice

$$D_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et $\text{tr}(A) = a \neq 0$.

Donc :

- si $\text{tr}(A) = 0$, alors A est semblable à N ;
- si $\text{tr}(A) \neq 0$, alors A est semblable à D_a avec $a = \text{tr}(A)$.

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1.

- Supposons $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.
 - Si $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$, alors A et B sont semblables à N , donc par transitivité, A et B sont semblables.
 - Si $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \neq 0$, alors A et B sont semblables à D_a avec $a = \text{tr}(A)$, donc A et B sont semblables.
- Supposons A et B semblables. Donc il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$, donc :

$$\text{tr}(B) = \text{tr}((P^{-1}A)P) = \text{tr}(P(P^{-1}A)) = \text{tr}(A)$$

remarque : on utilise la propriété $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, mais $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$.

Conclusion :

dans $M_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

Problème (CCINP 2018 maths 2 Problème)

Questions préliminaires

Q8. L'endomorphisme u est diagonalisable, il existe donc une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ où les d_i sont tous des valeurs propres de u . Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(D) = \text{diag}(P(d_1), \dots, P(d_n))$. Chaque d_i étant racine de P , on conclut que $P(D) = 0$ et donc que $P(u) = 0$.

$$P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p) \text{ est annulateur de } u$$

Q9. Les μ_i étant deux à deux distincts, les polynômes $X - \mu_i$ sont premiers entre eux deux à deux. Donc d'après le lemme des noyaux,

$$\text{Ker}(Q(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(u - \mu_i \text{Id})$$

Q annihilant u , cet espace est égal à $\mathbb{R}^n$ tout entier. En ne conservant que les μ_i tels que $\text{Ker}(u - \mu_i \text{Id}) \neq \{0\}$ et en concaténant des bases de ces espaces, on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de u et telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux font tous partie des μ_i . Ainsi,

$$u \text{ est } \mathbb{R}\text{-diagonalisable et } \text{Sp}(u) \subset \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$$

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Q10. On a $\chi_V = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, donc les valeurs propres de V sont donc 1 et 2. Et χ_V étant simplement scindé, V est diagonalisable à sous-espaces propres de dimension 1. Comme $(2, -3)$ et $(1, -1)$ sont propres, ils engendrent chacun un sous-espace propre. Donc :

$$V = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Q11. En faisant un produit par bloc, on vérifie que Q est inversible d'inverse

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$$

(il suffit de vérifier que $QQ^{-1} = I_{2n}$). Un produit par blocs montre alors que

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$$

ce qui donne la similitude voulue.

Q12. On obtient

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}AR & 0 \\ 0 & 2R^{-1}AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}$$

A est semblable à B elle-même semblable à une matrice diagonale. Par transitivité de la relation de similitude,

$$\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}$$

Q13. On a vu que

$$\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} = QBQ^{-1}$$

Appliquons le polynôme T qui annule la matrice de droite :

$$0 = QT(B)Q^{-1}$$

En multipliant par Q^{-1} à gauche et Q à droite, on conclut que $T(B) = 0$.

On montre par une récurrence immédiate que $B^k = \text{diag}(A^k, (2A)^k)$ et en combinant linéairement, $T(B) = \text{diag}(T(A), T(2A))$.

On en déduit alors que

$$T(A) = 0$$

Ainsi A est diagonalisable puisqu'elle est annihilée par un polynôme simplement scindé. Finalement,

$$\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable ssi } A \text{ l'est}$$

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

Q14. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice E . Donc

$$f(1, 1) = (1, 1)$$

Et pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (-2)(1, 1) + (x, y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -2 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = (y - 1, 2y)$$

Donc (pour $y = 0$) $f(-1, 0) = (-2)(1, 1) + (-1, 0)$. Et $((1, 1), (-1, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après les formules de changement de base :

$$P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q15. De manière similaire à précédemment, $Z = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse

$Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ et un calcul par blocs donne

$$Z^{-1} \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Q16. Montrons par récurrence que

$$F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

- C'est vrai au rang $k = 0$ car $F^0 = I_{2n}$.
- Supposons le résultat vrai au rang k . Il suffit alors d'un calcul par bloc pour voir que cela reste vrai au rang $k + 1$.

En notant $U = \sum_{k=0}^d u_k X^k$, on en déduit que

$$U(F) = \begin{pmatrix} U(A) & V(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \text{ avec } V(A) = -2 \sum_{k=1}^d k u_k A^k = -2AU'(A)$$

Comme $U(F) = 0$, on en déduit que

$$\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} = 0$$

Q17. Ce qui précède montre que U et XU' annulent A et sont donc multiples du polynôme minimal de μ_A de A (l'ensemble des polynômes annulateurs étant l'idéal engendré par μ_A). On en déduit que μ_A divise $U \wedge XU'$.

Or, U étant scindé simple, U et U' sont premiers entre eux (aucun des diviseurs irréductible de U ne divise U') et donc $U \wedge XU' = U \wedge X$.

Ainsi, μ_A est un diviseur de X . Or $\deg(\mu_A) \geq 1$ (un polynôme constant non nul n'annule aucune matrice) et ainsi $\mu_A = X$ (μ_A est unitaire). Comme μ_A annule A , A est nulle.

$$\mu_A = X \text{ et } A = 0$$

Q18. Si $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable alors F (qui lui est semblable) l'est aussi. On vient alors de voir que $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$ alors $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est nulle est donc diagonalisable.

$$\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable ssi } A = 0$$

Q19. $\chi_F(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - F)$ est un déterminant bloc triangulaire. Avec la formule rappelée par l'énoncé,

$$\chi_F = \chi_A^2$$

Si F est trigonalisable alors χ_F est scindé et tout diviseur de χ_F l'est donc aussi. Ainsi, χ_A est scindé et A est trigonalisable.

Réciproquement, si A est trigonalisable alors χ_A est scindé et donc χ_F aussi. F est alors trigonalisable.

$$F \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } A \text{ l'est}$$

Q20. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $\chi_A = (X^2 + 1)$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et A n'est donc pas trigonalisable. Avec la question précédente, F ne l'est pas.