

3.2 Diffusion de particules-Exercice 14

On envisage une bulle de champagne unique, sphérique de centre B fixe et de rayon variable $a(t)$ contenant $N_g(t)$ molécules de dioxyde de carbone assimilé à un gaz parfait. On note $C_g(t)$ le nombre, supposé uniforme, de molécules de dioxyde de carbone par unité de volume dans cette bulle. On repère un point M par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre B. Le champagne liquide occupe le reste de l'espace et on y note $C(r, t)$ le nombre volumique de molécules de dioxyde de carbone, supposé indépendant de θ et φ . Dans cette partie, on néglige les phénomènes de tension superficielle et la pesanteur, de telle sorte que la pression P est uniforme dans tout le système, avec la même valeur dans la phase gazeuse et dans la phase liquide. L'équilibre chimique entre une bulle de champagne et la solution aqueuse qui l'entoure dans une bouteille fermée où la pression initiale vaut $P = P_i$, impose la relation $C = \chi P_i / k_B T$ entre le nombre volumique de molécules C dans la phase liquide et la pression P_i dans la phase gazeuse ; χ ne dépend que de la température (c'est donc une constante) ; k_B est la constante de Boltzmann. Lorsqu'on ouvre la bouteille de champagne, la pression chute brutalement jusqu'à la pression atmosphérique $P = P_e$ avec $P_e < P_i$. La condition d'équilibre chimique n'est plus assurée qu'à l'interface entre la bulle et la solution, elle s'écrit : $C(r = a, t) = \chi P_e / k_B T$. Loin de la bulle, on suppose qu'on a toujours $C(r = \infty, t) = \chi P_i / k_B T$. Ainsi $C(r, t)$ n'est plus uniforme et le dioxyde de carbone diffuse dans la solution : on note $\vec{j} = j(r, t) \vec{u}_r$ le vecteur densité de flux de particules ; il satisfait à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D .

- a-Exprimer le flux $\Phi(r)$ en dioxyde de carbone à travers la sphère de rayon r en fonction de r et $j(r, t)$.
- b-On se place en régime stationnaire. En déduire que $C(r)$ est de la forme $C(r) = \alpha + \beta / r$ où α et β sont deux constantes.
- c-Bien que le régime réel ne soit pas stationnaire puisque le rayon a dépend du temps, on utilise la forme de $C(r)$ ci-dessus avec $a(t)$. Exprimer α et β en fonction de $a(t)$, χ , P_i , P_e , k_B et T .
- d-En déduire le taux de variation dN_g / dt du nombre N_g de molécules de dioxyde de carbone dans la bulle de gaz en fonction de D , a , χ , P_i , P_e , k_B et T .
- e-Montrer que $a(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme : $a(t)\dot{a}(t) = K$ où K est une constante qu'on exprimera en fonction de P_e , P_i , χ et D . Vérifier l'homogénéité K .
- f-En déduire l'expression de $a(t)$. Lors de la croissance de la bulle à la surface du verre sur son site de naissance pour $P_e = 1$ bar et $P_i = 3$ bars, le rayon des bulles croît de $a_0 \approx 10^{-6}$ m jusqu'à $a_1 \approx 10^{-5}$ m. Vérifier que dans ces conditions on a $K \approx 4.10^{-9} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ sachant que $D \approx 3.10^{-9} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et $\chi \approx 0,7$. Évaluer la durée τ de cette phase.
-

3.2 Diffusion de particules-Exercice 14

a- $\Phi(r) = \iint_{\substack{\text{sphère} \\ \text{rayon } r}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 j(r, t) \quad \text{avec } d\vec{S} = dS \vec{u}_r$

b- En régime stationnaire, $\Phi(r)$ est indépendant de r car il y a conservation du flux. C'est une constante Φ .

Loi de Fick : $j(r) = -D \frac{dC}{dr}$

Donc : $\frac{dC}{dr} = -\frac{\Phi}{4\pi D r^2}$ En intégrant : $C(r) = \frac{\beta}{r} + \alpha$ avec $\beta = \frac{\Phi}{4\pi D}$

c- Conditions aux limites :

• $r \rightarrow \infty$: $\alpha = \frac{\chi P_i}{k_B T}$

• $r = a(t)$: $\frac{\beta}{a(t)} + \alpha = \frac{\chi P_e}{k_B T} \Rightarrow \beta = \frac{\chi(P_e - P_i)}{k_B T} a(t)$

d- Bilan global de molécules de dioxyde de carbone dans la bulle : $\frac{dN_g}{dt} = \Phi_{\text{entrant}} = -\Phi$

Or : $\Phi = 4\pi D \beta = 4\pi D \frac{\chi(P_e - P_i)}{k_B T} a(t)$

Donc : $\frac{dN_g}{dt} = 4\pi D \frac{\chi(P_i - P_e)}{k_B T} a(t)$

e- Equation d'état du gaz parfait pour le dioxyde de carbone dans la bulle : $P_e \frac{4}{3} \pi a^3(t) = \frac{N_g}{N_A} RT = N_g k_B T$

Donc : $N_g = \frac{4\pi P_e a^3(t)}{3k_B T}$ puis : $\frac{dN_g}{dt} = \frac{4\pi P_e}{k_B T} a^2(t) \dot{a}(t)$

En égalant les deux expressions de $\frac{dN_g}{dt}$ on a : $\frac{4\pi P_e}{k_B T} a^2(t) \dot{a}(t) = 4\pi D \frac{\chi(P_i - P_e)}{k_B T} a(t)$

Soit : $a(t) \dot{a}(t) = D \frac{\chi(P_i - P_e)}{P_e}$ On a donc : $K = D \frac{\chi(P_i - P_e)}{P_e}$ en $\underline{m^2.s^{-1}}$

f- On intègre entre $t = 0$ et t : $\frac{a^2(t) - a_0^2}{2} = Kt \Rightarrow a(t) = \sqrt{a_0^2 + 2Kt}$

A.N : $K = 4,2.10^{-9} \text{ m}^2.s^{-1}$

$\tau = \frac{a_1^2 - a_0^2}{2K} = \underline{12 \text{ ms}}$