

DM4 (SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS)

Pour le 3 novembre

Problème 1 : Comparaison des modes de convergence d'une série de fonctions

Dans toute la suite, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Dans ce sujet exclusivement, on dira que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument.

Le but de ce problème est de comparer les différents modes de convergence d'une série de fonctions : convergence simple, convergence uniforme, convergence normale et convergence absolue.

1. Pour chaque couple d'assertions ci-dessous, préciser l'implication logique donnée par le cours en indiquant $\Leftarrow$ ou $\Rightarrow$ entre les deux :

(a) $[\sum f_n \text{ converge uniformément sur } I] \dots [\sum f_n \text{ converge normalement sur } I]$

(b) $[\sum f_n \text{ converge uniformément sur } I] \dots [\sum f_n \text{ converge simplement sur } I]$

(c) $[\sum f_n \text{ converge absolument sur } I] \dots [\sum f_n \text{ converge normalement sur } I]$

(d) $[\sum f_n \text{ converge absolument sur } I] \dots [\sum f_n \text{ converge simplement sur } I]$

2. Étudier chacun des quatre modes de convergence pour la série de fonctions $\sum f_n$ sur I dans les deux cas suivants :

(a) $I = \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{2^n} + \frac{\sin(nx)}{3^n}$.

(b) $I = \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n+1}$.

3. Dans cette question, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)$.

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ ne converge absolument en aucune valeur x de $[0, 1]$.

(c) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

4. Dans cette question, on pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, $f_n(x) = x^n$.

- (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $] - 1, 1[$.
- (b) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $] - 1, 1[$.
- (c) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur $] - 1, 1[$.

Dans les questions **5.** à **8.**, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ désigne une suite décroissante de réels positifs, $I = [0, 1[$ et on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$:

$$f_n(x) = \alpha_n x^n (1 - x).$$

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est bornée et montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I .
6. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sup_{x \in I} |f_n(x)| = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.
 (b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.
7. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$, calculer $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$.
 (b) Montrer que si la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I .
 On pourra observer que pour tout $k \geq n+1$, on a $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.
 (c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
8. Dans chacun des cas suivants, donner en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que :
 - (a) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I .
 - (b) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I .
 - (c) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I .
9. Montrer à l'aide de contre-exemples tirés des questions précédentes que les implications réciproques des implications établies à la question **1.** sont fausses.
10. Existe-t-il des implications logiques entre les assertions $[\sum f_n \text{ converge uniformément sur } I]$ et $[\sum f_n \text{ converge absolument sur } I]$? Prouver vos affirmations.

Problème 2 : Théorème de Weierstrass

Le but de ce problème est de démontrer le *théorème de Weierstrass* :

Si f est une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors il existe une suite (P_n) de fonctions polynômiales convergeant uniformément vers f sur $[0, 1]$.

1. On considère dans cette question la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k} \right)$$

- (a) On pose pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \sqrt{n} u_n$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- (b) Étudier la nature de la série de terme général $w_n = \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- (c) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente . On note L sa limite.
Comparer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les réels u_n et $\frac{L}{\sqrt{n}}$.

2. On considère dans cette question la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = \sqrt{1-x}$ pour $x \in [0, 1]$.

- (a) Déterminer la dérivée d'ordre n de $\varphi : x \mapsto \varphi^{(n)}(x)$ pour $x \in [0, 1[$.
- (b) Soit $x \in [0, 1[$. La formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à φ sur $[0, x]$ s'exprime sous la forme $\varphi(x) = P_n(x) + R_n(x)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré n et :

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \varphi^{(n+1)}(t) dt$$

Exprimer les coefficients de P_n en fonction de n . Donner la valeur de P_4 .

- (c) Démontrer la majoration :

$$\forall x \in [0, 1[, |R_n(x)| \leq \frac{1}{2} u_n \int_0^x (1-t)^{-1/2} dt$$

En déduire :

$$\forall x \in [0, 1[, |R_n(x)| \leq u_n$$

- (d) Démontrer que la suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction φ .

Dans la question suivante, on note Q_n le polynôme tel que $Q_n(x) = P_n(1-x^2)$.

- (e) Soit ε un réel strictement positif et M une constante strictement positive.

Démontrer que si l'entier naturel N vérifie $N \geq \frac{L^2 M^2}{\varepsilon^2}$ alors

$$\forall x \in [-1, 1], |x| - Q_N(x) \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

3. **On considère dans toute la suite une fonction f continue sur $[0, 1]$ et ε un réel strictement positif.**

On admet qu'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| < 1/n \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Dans la suite du problème, n désigne l'entier ainsi défini.

- (a) Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$, vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$, $g\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$, et affine sur chacun des intervalles $[k/n, (k+1)/n]$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

Déterminer l'expression de $g(x)$ lorsque $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$.

- (b) Démontrer que $\forall x \in [0, 1], |g(x) - f(x)| < \varepsilon$.

On pourra remarquer que l'on peut écrire $g(x)$ sous la forme $\alpha f\left(\frac{k}{n}\right) + (1 - \alpha)f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

4. Dans cette question, on considère les matrices $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de termes généraux respectifs :

$$(a_{i,j} = |i - j|)_{1 \leq i, j \leq n+1} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_{i,i} = -1 \text{ si } i \neq 1 \text{ et } i \neq n+1 \\ b_{1,1} = b_{n+1,n+1} = \frac{1-n}{2n} \\ \text{si } |i - j| = 1 \text{ alors } b_{i,j} = \frac{1}{2} \\ b_{1,n+1} = b_{n+1,1} = \frac{1}{2n} \\ b_{i,j} = 0 \text{ dans tous les autres cas} \end{cases}$$

On admettra que A_{n+1} est inversible et que $A_{n+1}^{-1} = B_{n+1}$ (ce résultat est démontré en partie à la question 6.)

- (a) Soit E_{n+1} l'espace vectoriel des fonctions g définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que g soit affine sur chacun des intervalles $[k/n, (k+1)/n]$ pour $0 \leq k \leq n-1$.
Soit d'autre part Φ l'application de E_{n+1} dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que

$$\forall g \in E_{n+1}, \Phi(g) = \left(g\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{0 \leq k \leq n}$$

Démontrer que Φ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et expliciter l'unique fonction $g_\alpha \in E_{n+1}$ telle que $\Phi(g) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ où $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

- (b) Pour tout entier j avec $0 \leq j \leq n$, on note $f_j \in E_{n+1}$ l'application

$$t \mapsto f_j(t) = \left|t - \frac{j}{n}\right|$$

Montrer que la famille $(f_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une base de E_{n+1} : on pourra par exemple expliciter la matrice de la famille des vecteurs $(\Phi(f_j))_{0 \leq j \leq n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

- (c) Soit $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $g_\alpha \in E_{n+1}$ la fonction définie à la question 4.a), telle que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $g_\alpha\left(\frac{k}{n}\right) = a_k$.

Démontrer qu'il existe $n+1$ réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall x \in [0, 1], g_\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(x)$$

Déterminer la valeur des coefficients λ_k pour $0 \leq k \leq n$ en fonction de $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

5. (a) On considère la fonction g définie à la question 3.a)

Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $g = g_\alpha$.

En déduire l'expression à l'aide de f des coefficients λ_k pour $1 \leq k \leq n-1$ de la question 4.c).

On pose $M = \sum_{k=0}^n |\lambda_k|$ et on note Q_N le polynôme correspondant défini à la question 2.e).

(b) On pose

$$R(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k Q_N \left(x - \frac{k}{n} \right)$$

Démontrer que :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - R(x)| \leq 2\varepsilon$$

(c) Conclure.

6. On revient sur la matrice A_{n+1} étudiée à la question 4.

Calculer $\det(A_{n+1})$ en fonction de n .

On effectuera pour cela les opérations suivantes :

- ★ pour i allant de $n+1$ à 2, remplacer la ligne L_i par la ligne $L_i - L_{i-1}$
- ★ pour j allant de 2 à n , remplacer la colonne C_j par la colonne $C_j - C_1$

En déduire que A_{n+1} est inversible.