

Problème n°1 :**Centrale PSI 2021 PhCh1 (extrait)***Le feu et l'eau*

Le 15 avril 2019, un violent incendie s'est déclaré dans la cathédrale de Notre-Dame de Paris. La charpente constituée de milliers de poutres provenant de chênes centenaires a entièrement brûlé, la flèche réalisée en plomb s'est effondrée et la structure a été endommagée. Ce sujet traite quelques points concernant cet incendie. Il est constitué de trois parties.

Certaines questions peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche et les choix effectués et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques sont regroupées en fin d'énoncé.

I.A – Démarrage d'une combustion

Cette sous-partie s'intéresse au rôle de la température dans le triangle du feu.

La réaction combustible-comburant est une réaction d'oxydation exothermique qui dégage de l'énergie et auto-entretient le feu.

Q 1. Rappeler la loi empirique d'Arrhenius et expliquer pourquoi la plupart des réactions chimiques sont accélérées par une augmentation de la température.

Q 2. Pour quelle phase (solide, liquide ou gaz) du combustible, l'amorçage d'une réaction de combustion devrait-il être plus aisé ? Justifier succinctement.

On appelle *point d'auto-inflammation*, la température à partir de laquelle une substance s'enflamme spontanément dans l'atmosphère normale. Pour une feuille de papier typique, le point d'auto-inflammation est de 232 °C. Le papier est ainsi facilement inflammable si l'on concentre, à l'aide d'une loupe, les rayons du soleil sur une feuille.

On place une feuille de papier noir (de masse surfacique $\sigma = 100 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$ et de capacité thermique massique $c = 1,4 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$) au foyer d'une lentille convergente de distance focale $f' = 10 \text{ cm}$ et de rayon $r = 5 \text{ cm}$. L'axe optique est dirigé selon la direction moyenne des rayons lumineux solaires. La lentille absorbe environ 25 % du rayonnement solaire dont le flux surfacique moyen est égal à $800 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.

Q 3. Déterminer la durée minimale nécessaire à l'auto-inflammation de la feuille de papier, de température initiale 20 °C, sachant que le Soleil est vu sous un diamètre angulaire apparent $\alpha = 32$ minutes d'arc.

Q 4. La durée réelle devrait-elle être plus importante ou plus faible ? Le choix du papier noir est-il judicieux ?

I.B – Combustion du bois

Un solide, en particulier le bois, passe par plusieurs phases au cours de son échauffement avant de brûler, avec apparition des flammes. D'abord l'eau qu'il contient s'évapore autour de 100 °C à la pression atmosphérique, puis les constituants du bois commencent à se décomposer ; il s'agit du phénomène de pyrolyse, généralement observé entre 250 °C et 500 °C, qui conduit à la formation de gaz. C'est une partie de l'énergie dégagée par la combustion de ces gaz de pyrolyse dans le dioxygène de l'air qui permet de perpétuer l'ensemble de ces étapes. Lorsque le processus de pyrolyse est terminé et qu'il n'y a plus de substances volatiles, il subsiste un résidu charbonneux rougeoyant qui dégage encore beaucoup d'énergie, sa surface extérieure atteignant 800 °C.

Le bois de chêne est composé principalement d'environ 25 % de lignine ($\text{C}_{40}\text{H}_{44}\text{O}_6$) et 75 % de carbohydrates $\text{C}_n(\text{H}_2\text{O})_m$ (cellulose ($\text{C}_6\text{H}_{10}\text{O}_5$)_p et hemicellulose).

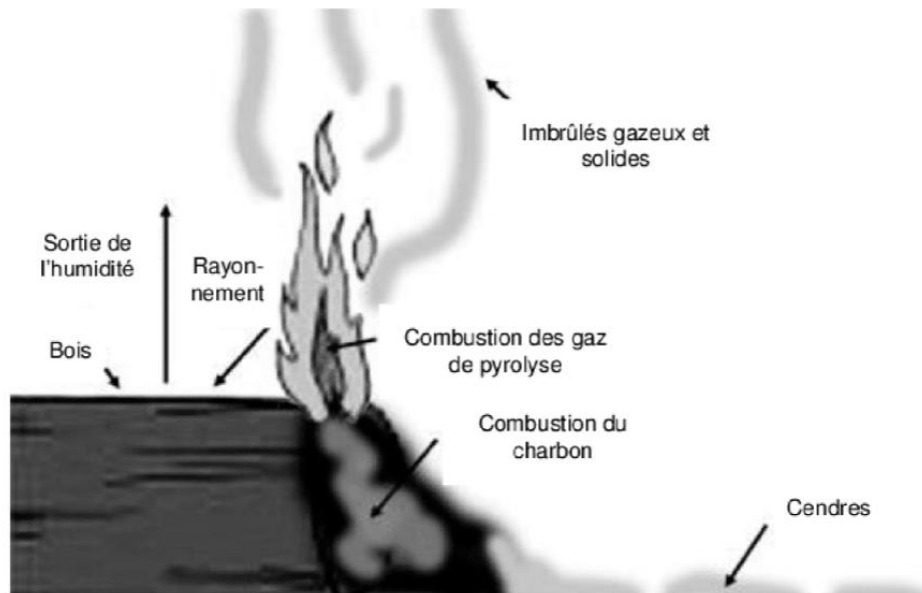


Figure 1 Différentes phases de combustion du bois¹

Q 5. Une analyse élémentaire a fourni les pourcentages massiques respectifs en élément carbone, hydrogène et oxygène de 50 %, 6 % et 44 %. Montrer que, si le bois pouvait être considéré comme un corps pur, sa formule chimique serait $\text{CH}_{1,44}\text{O}_{0,66}$.

Dans la suite, on assimilera le bois à un corps pur de formule chimique brute $\text{CH}_{1,44}\text{O}_{0,66}$.

Q 6. Écrire l'équation-bilan de la réaction de combustion du bois avec l'oxygène de l'air. La combustion est supposée complète et conduire à la formation de CO_2 et H_2O .

On appelle pouvoir calorifique inférieur (PCI) l'énergie dégagée par la combustion complète d'un kilogramme de combustible à pression constante, l'eau produite étant sous forme de vapeur.

Q 7. Pour le chêne, on mesure un PCI de $19 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$. Quelle serait la valeur numérique de l'enthalpie de réaction de cette combustion ?

Q 8. En admettant qu'en fin de pyrolyse, les gaz libérés soient pour l'essentiel du dihydrogène H_2 et du monoxyde de carbone CO , retrouver, à partir des données tabulées, la valeur de l'enthalpie standard de réaction de la combustion de ces gaz de pyrolyse dans le dioxygène de l'air. Conclure.

Q 9. Dans une pièce calorifugée et fermée, initialement à 20°C et de capacité thermique totale de l'ordre de $6,0 \times 10^5 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$, brûle une bûche de bois de chêne de 1 kg. Quelle est la température maximale atteinte dans la pièce ? Commenter.

I.C – Propagation de la chaleur dans le combustible

Q 10. Citer les trois modes de transfert thermique et donner leurs spécificités.

Q 11. Indiquer le rôle de chacun de ces modes dans la propagation d'un incendie.

On s'intéresse à l'avancée du front de combustion, au cours du temps, d'une poutre qui entre en combustion par l'une de ses extrémités. On fait l'hypothèse que les transferts thermiques dans le bois sont de nature purement diffusive.

La poutre en combustion est un parallélépipède, infiniment long dans la direction (Ox). La température sur une section transversale d'aire S de la poutre est supposée uniforme. On note $T(x, t)$ la température à l'abscisse x de la poutre à un instant t . On suppose que le feu prend à l'une de ses extrémités d'abscisse nulle à un instant pris comme origine des temps ($t = 0$). À un instant t ultérieur, on estime, dans ce modèle simple, que la poutre peut-être découpée en trois zones (figure 2) :

- la zone ayant brûlé entre l'instant initial et l'instant t , dont la température est supposée constante et égale à la température T_c , dite température de combustion, $T_c = 720 \text{ K}$;
- une zone dans laquelle se déroule la combustion ;
- la zone encore inaltérée.

¹ Benoît BRANDELET. (2016). *Caractérisation physico-chimique des particules issues du chauffage domestique au bois*. Thèse de doctorat. Université de Lorraine.

On note $x_1(t)$ l'abscisse de la frontière entre la zone brûlée et la zone de combustion et $x_2(t)$ l'abscisse de la frontière entre la zone de combustion et la zone inaltérée. Loin de $x_2(t)$, la température est supposée constante et égale à $T_\infty = 320$ K.

La température $T(x, t)$ dans la zone en combustion et celle de la zone inaltérée augmentent par diffusion au cours du temps jusqu'à atteindre les températures de combustion T_c et d'inflammation du bois $T_i = 520$ K, conduisant à l'avancement des frontières x_1 et x_2 au cours du temps. Ainsi, tant que la poutre n'a pas fini de brûler, on a toujours $T(x_1(t), t) = T_c$ et $T(x_2(t), t) = T_i$.

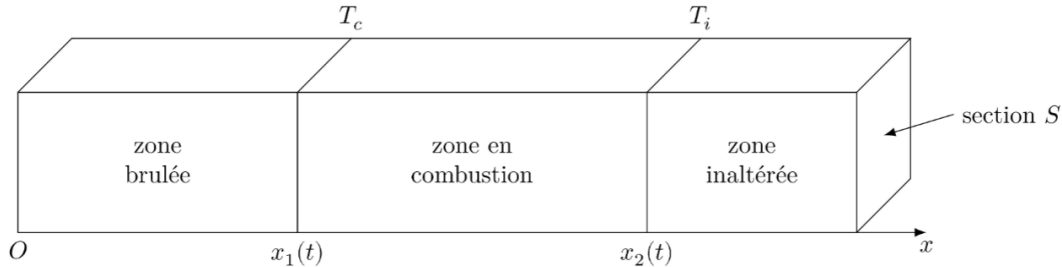


Figure 2 Schéma de la poutre à l'instant t

Les valeurs des conductivités thermiques, notées λ , et des diffusivités thermiques, notées D , du charbon et du bois étant relativement proches, nous considérerons qu'elles sont égales dans les trois zones. Nous prendrons comme valeur de la diffusivité thermique $D = 1,0 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. On rappelle que la diffusivité thermique d'un matériau est le rapport entre sa conductivité thermique et sa capacité thermique volumique à pression constante.

On note c_p la capacité thermique massique à pression constante du bois dans la zone de combustion, μ sa masse volumique et P_c la puissance thermique massique correspondant à l'enthalpie de réaction de combustion par unité de masse de bois et par unité de temps. On donne $P_c = 4,0 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $c_p = 2,0 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Q 12. Effectuer un bilan d'enthalpie sur un élément de longueur dx de poutre de bois de section S compris entre x et $x + dx$, dans la zone de combustion. En supposant la loi de Fourier applicable, en déduire l'équation régissant l'évolution de la température $T(x, t)$ dans la zone de combustion. Mettre cette équation sous la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa$$

en précisant les expressions de D et κ en fonction des données du problème.

Q 13. De même, écrire l'équation régissant l'évolution de la température $T(x, t)$ dans la zone non altérée.

On souhaite dans un premier temps vérifier si l'on peut se placer dans le cadre simplifié de l'approximation des régimes quasi stationnaires thermiques.

Q 14. Calculer la durée caractéristique τ_d de diffusion thermique pour une longueur d'une dizaine de centimètres d'un tronçon de poutre. Comparer ce temps de diffusion à l'ordre de grandeur de la durée τ_c de combustion d'une même longueur de poutre. Conclure.

On se propose de résoudre les équations précédentes sous forme d'une onde se propageant dans la poutre. On pose $u = x - ct$ où c est une constante positive et on effectue le changement de variables tel que $T(x, t) = \theta(u)$.

Q 15. Donner une interprétation de la quantité c .

Q 16. Déterminer les équations différentielles régissant l'évolution de la dérivée de $\theta(u)$ dans la zone inaltérée et dans la zone en combustion.

Q 17. Montrer que la forme générale des solutions $\theta_i(u)$ ($i = 1, 2$ ou 3) dans chacune des trois zones respectives peut s'écrire

$$\begin{cases} \theta_1(u) = a_1 & \text{pour } u < u_1, \\ \theta_2(u) = a_2 + b_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) - \frac{\kappa}{c}u & \text{pour } u_1 < u < u_2, \\ \theta_3(u) = a_3 + b_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) & \text{pour } u > u_2. \end{cases}$$

Q 18. Déterminer, en justifiant la réponse, les expressions de a_1 et a_3 en fonction des données.

Q 19. Tracer l'allure de la fonction $\theta(u)$ dans la poutre.

Q 20. Quelles conditions permettent d'obtenir les constantes a_2 , b_2 et b_3 ? On ne cherchera pas à les expliciter littéralement.

On montre que la constante c est solution de l'équation

$$\frac{c^2}{\kappa D}(T_c - T_\infty) = -\ln\left(1 - \frac{c^2}{\kappa D}(T_i - T_\infty)\right).$$

On se propose de déterminer la valeur de c par une méthode graphique. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$ est fournie en annexe.

Q 21. Déterminer une valeur approchée de c . Conclure.

Q 22. Estimer la durée de combustion complète d'un mètre de poutre.

Données

Constantes et conversions de quelques unités

Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Accélération normale de la pesanteur terrestre	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
Le faraday	$1 \text{ F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
La minute d'arc	$1' = 1/60^\circ$

Données atomiques

Élément	H	C	O	Pb
Numéro atomique	1	6	8	82
Masse molaire ($\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)	1,0	12,0	16,0	207,2

Données thermodynamiques et autres caractéristiques

Viscosité dynamique de l'eau (supposée indépendante de la température) : $\eta = 1,0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Masses volumiques dans les conditions usuelles de températures et de pression :

eau liquide	$1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
air	$1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

Capacité thermiques dans les conditions usuelles de températures et de pression (on admet que ces grandeurs ne dépendent pas de la température)

eau liquide	$c_P = 4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
eau vapeur	$c_P = 1850 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
air sec	$c_P = 1005 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
air saturé en vapeur d'eau	$c_P = 1030 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

Enthalpie massique standard de vaporisation de l'eau à 100°C : $\Delta_{\text{vap}}H^\circ = 2257 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

Espèces	$\Delta_f H^\circ$ ($\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$)
$\text{H}_2(\text{g})$	0
$\text{O}_2(\text{g})$	0
$\text{H}_2\text{O}(\text{l})$	-285,1
$\text{H}_2\text{O}(\text{g})$	-241,8
$\text{C}_{(\text{graphite})}$	0
$\text{CO}(\text{g})$	-110,6
$\text{CO}_2(\text{g})$	-393,5
$\text{Pb}_{(\text{s})}$	0
$\text{PbO}_{(\text{s})}$	-218,0
$\text{PbO}_2(\text{s})$	-277,1
$\text{PbS}_{(\text{s})}$	-100,4
$\text{Pb}_3\text{O}_4(\text{s})$	-719,0
$\text{SO}_2(\text{s})$	-296,9

Enthalpies molaires standard de formation à 298 K :

Problème n°2 : Mines Ponts PSI 2022 Ph1 (extrait)

Fourier dans tous ses états

Ce problème traite de quelques applications de l'analyse de Fourier à la physique. Il comporte 3 parties largement indépendantes. La première partie est consacrée à l'étude de l'échantillonnage d'un signal électronique. La deuxième partie aborde le filtrage acoustique à travers l'étude de la transmission d'une onde sonore par une paroi mobile. La troisième partie présente l'expérience originelle de Joseph Fourier de l'étude des phénomènes de diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique. C'est notamment cette expérience qui lui a permis d'introduire pour la première fois la décomposition d'une fonction périodique en séries dites « de Fourier ».

Dans tout le problème, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique avec, au plus, deux chiffres significatifs.

Les vecteurs unitaires seront notés avec un chapeau \hat{e} , ainsi, dans l'espace cartésien $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ un vecteur quelconque \vec{a} s'écrira $\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$. On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

Données numériques

- Masse volumique de l'air : $\mu_0 = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Capacité thermique massique du fer : $c = 4,0 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Masse volumique du fer : $\mu_f = 7,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
- Conductivité thermique du fer : $\lambda = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Coefficient conducto-convectif à l'interface fer-air : $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

I Analyse de Fourier et échantillonnage d'un signal électronique

Dans cette partie, on note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation, appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

- – 1. On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$. Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t) \times p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée sur la figure 1 ci-dessous. On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t_k) = x(t_k)$.

On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = \frac{1}{T_e}$.

- – 2. Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 4f_0$, $f_e = 2f_0$ et $f_e = \frac{4}{3}f_0$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

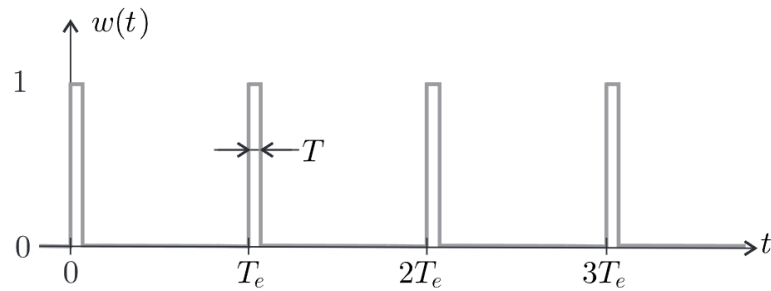


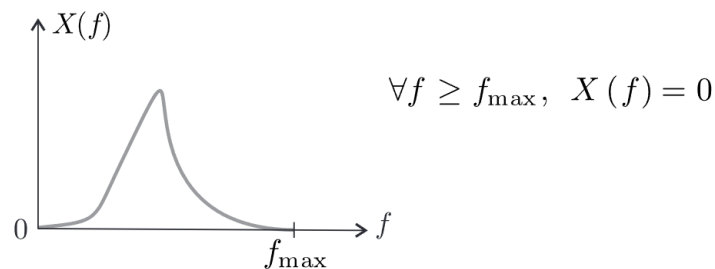
FIGURE 1 – Signal d'échantillonnage.

- – 3. Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t).$$

Représenter, par analogie avec la question 1, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = \frac{4}{3}f_0$ (on se limitera aux valeurs de k telles que $0 \leq k \leq 2$). Montrer que, dans l'un des cas, les motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0, f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.

- – 4. En s'inspirant des questions 2 et 3, proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée « critère de Shannon-Nyquist ».
- – 5. On considère dorénavant un signal temporel $X(t)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté sur la figure 2, fait apparaître une fréquence maximale f_{\max} . Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation ? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de f_{\max} et f_e .

FIGURE 2 – Le spectre du signal X est borné en fréquence.

- – 6. Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.
- – 7. La durée d'enregistrement d'un CD audio est de $\Delta t = 75$ min. L'échantillonnage se fait à une fréquence $f_e = 44,1$ kHz et avec résolution de 16 bits. De plus, l'enregistrement est fait sur deux voies séparées en stéréo. Déterminer la taille minimale du fichier musical. On donnera le résultat en mégaoctets (Mo), un octet correspondant à 8 bits.

II (Partie supprimée pour ce DS)

III Analyse de Fourier et diffusion thermique

On considère un matériau homogène assimilable à une répartition unidimensionnelle de matière selon un axe (Ox). On rappelle l'équation de la diffusion thermique unidimensionnelle sans perte et sans terme source, donnant la température $T(x,t)$ à l'abscisse x et au temps t dans le matériau :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} .$$

- – 15. Déterminer l'expression de la constante D en fonction de la masse volumique μ , du coefficient de conductivité thermique λ et de la capacité thermique massique c du matériau considéré. On pourra raisonner par analyse dimensionnelle. En déduire l'expression du temps caractéristique de diffusion τ sur une longueur L . Faire l'application numérique pour une diffusion dans le fer sur une longueur $L = 50$ cm.

Joseph Fourier a étudié la diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique, de rayon moyen $R = 16$ cm et de section carrée de côté $a \ll R$. L'anneau est chauffé en un point pris comme origine des angles $\theta = 0$ dans une base cylindrique puis on suit l'évolution de la température à différents instants et pour différentes valeurs de l'angle θ .

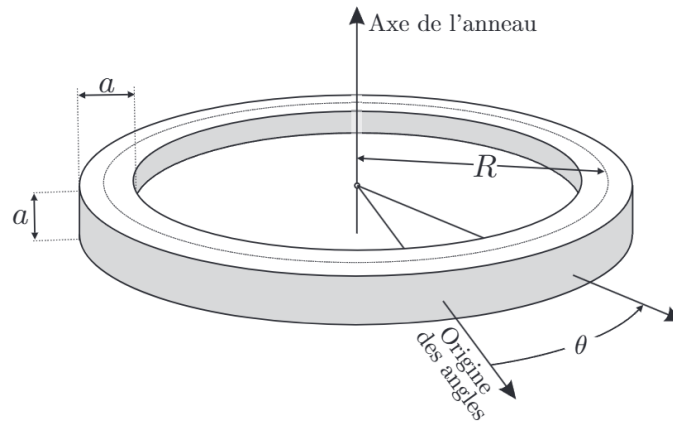


FIGURE 3 – Géométrie du problème étudié par Fourier : le tore à section carrée.

On notera $T(\theta,t)$ la température de l'anneau, supposée uniforme sur une section droite. On choisira $\theta \in]-\pi; \pi]$ et on admettra que, par symétrie, $T(-\theta,t) = T(\theta,t)$.

Le flux thermique conducto-convectif $\delta\Phi$ sortant à travers une surface dS de l'anneau de fer vers l'air environnant (de température T_e constante) est modélisé par la loi de Newton

$$\delta\Phi = h(T(\theta,t) - T_e)dS ,$$

dans laquelle le coefficient d'échange thermique h est supposé constant.

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{e}_z .$$

- – 16. Rappeler la loi de Fourier pour la diffusion thermique. En déduire l'expression du vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} puis dessiner l'allure des lignes de champ le long de l'anneau, en précisant leur orientation. Une ligne de champ est une courbe tangente en tout point au vecteur \vec{j}_{th}

Pour établir l'équation décrivant l'évolution de la fonction $T(\theta, t)$ dans l'anneau, on considère le volume élémentaire dV compris entre deux sections de surface a^2 de l'anneau, repérées par les angles θ et $\theta + d\theta$.

- – 17. Déterminer les expressions approchées de dV ainsi défini et de la surface élémentaire dS_{lat} de son contact avec l'air. On rappelle que $a \ll R$. En déduire que $T(\theta, t)$ vérifie l'équation

$$\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a} (T - T_e) = \mu c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

- – 18. Donner, en régime stationnaire, et en fonction de T_e , R , θ et de $\delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{4h}}$, la forme de la solution $T(\theta)$. On introduira deux constantes d'intégration A et B sans chercher à les déterminer pour l'instant. Préciser, en le justifiant, la dimension de la grandeur δ .
- – 19. On donne sur la figure 4 l'allure de la représentation graphique associée aux solutions $T(\theta)$ et $j_{th}(\theta)$ (pour r fixé). On note $T_1 = T(\theta = 0)$ la valeur, imposée par le chauffage, en $\theta = 0$. Commenter ces deux graphes puis les exploiter judicieusement pour déterminer, sur l'intervalle $[0, +\pi]$, les constantes A et B introduites précédemment, en fonction de T_1 , T_e , R et δ . En déduire la solution $T(\theta)$ sur l'intervalle $[0, +\pi]$.

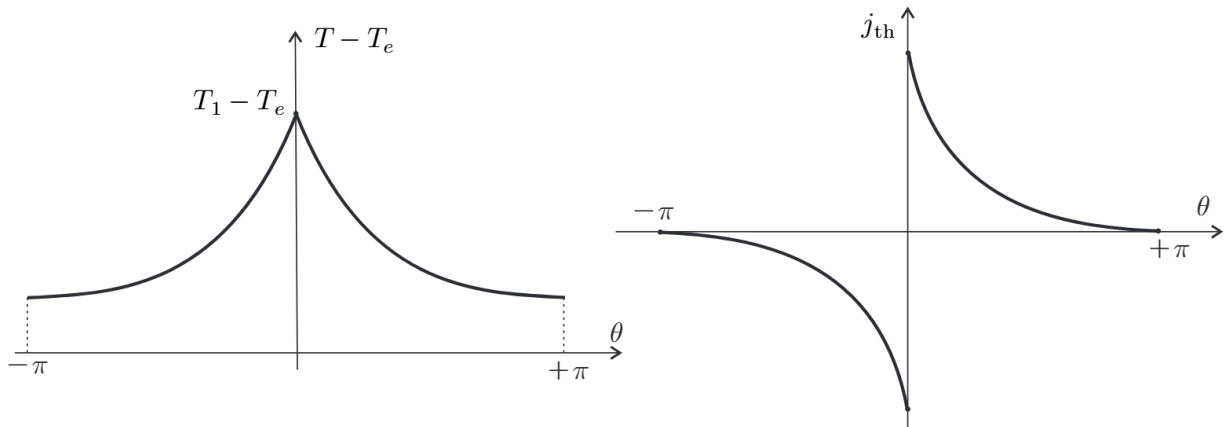


FIGURE 4 – Graphe des solutions : Différence de température à gauche, flux thermique surfacique à droite.

- – 20. Sur les relevés expérimentaux de Joseph Fourier du 31 juillet 1806, on lit que deux heures après le début du chauffage, les valeurs de températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires. Montrer que cet ordre de grandeur était prévisible à condition de supposer le phénomène de diffusion prépondérant en régime transitoire.

C'est en étudiant la diffusion thermique dans le dispositif expérimental décrit précédemment que Joseph Fourier découvrit les séries trigonométriques, dites « séries de Fourier ». L'anneau est chauffé comme précédemment en $\theta = 0$ puis enfoui presque complètement dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale

de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable et que la température reste de la forme $T(\theta, t)$. On s'intéresse toujours au domaine $\theta \in]-\pi; \pi]$, avec $T(-\theta, t) = T(\theta, t)$ par symétrie.

- – 21. Donner l'équation vérifiée par $T(\theta, t)$. On cherche les solutions à variable séparée de la forme $T_n(\theta, t) = f_n(\theta) g_n(t)$. L'interprétation de l'indice n apparaîtra dans la donnée de la condition initiale nécessaire à la résolution complète de l'équation. Déterminer les expressions générales de $f_n(\theta)$ et $g_n(t)$ puis montrer que $T_n(\theta, t)$ s'écrit sous la forme

$$T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n}.$$

Indication : quand on a une fonction d'une seule variable $f_1(x)$ et une autre fonction d'une seule variable $f_2(y)$, si on arrive à écrire que, pour tout x et tout y , $\frac{f_1''(x)}{f_1(x)} = K \times \frac{f_2''(y)}{f_2(y)}$, K étant une constante, alors on peut conclure que $\frac{f_1''(x)}{f_1(x)} = K_1$, K_1 étant une constante, et que $\frac{f_2''(y)}{f_2(y)} = K_2$, K_2 étant une autre constante, reliée à K_1 par $K_1 = K \times K_2$.

En effet, dans l'équation $\frac{f_1''(x)}{f_1(x)} = K \times \frac{f_2''(y)}{f_2(y)}$, le premier membre ne dépend pas de y , le second membre ne dépend pas de x , et comme les deux membres sont égaux, ils ne dépendent, chacun, ni de x , ni de y . Ils sont donc tous deux égaux à une constante.

On donnera la relation entre τ_n et d_n et on précisera leurs dimensions respectives.

- – 22. À l'instant $t = 0$, la température initiale d'une section repérée par l'angle θ est une fonction $T_0(\theta)$, symétrique, de période 2π et dont le développement en série de Fourier est de la forme

$$T_0(\theta) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta).$$

Les coefficients b_n sont supposés connus. Que représente la constante T_m ? Justifier précisément pourquoi la solution générale $T(\theta, t)$ peut se mettre sous la forme

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t).$$

Expliciter B_n , d_n et τ_n en fonction de b_n , n , R , μ , c et λ .

- – 23. Joseph Fourier remarque, en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, que $T(\theta, t) - T_m$ devient rapidement proportionnel à $\cos(\theta)$. Commenter cette constatation.