

Problème n°1 :**Centrale PSI 2021 PhCh1 (extrait)****I. Le feu****I.A. Démarrage d'une combustion**

Q1 La loi d'Arrhenius exprime la dépendance de la constante de vitesse d'une réaction chimique avec la température :

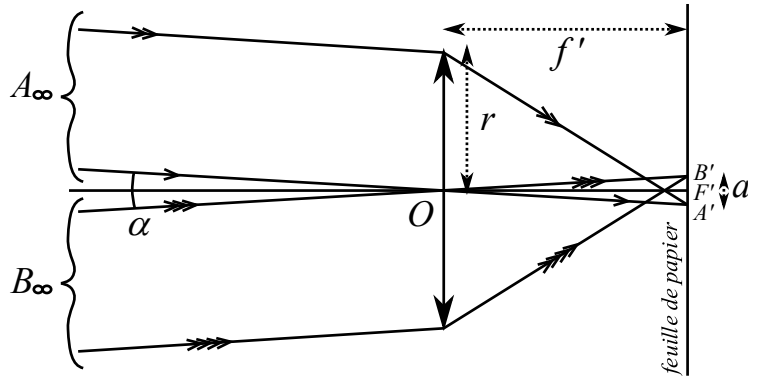
$k(T) = k_0 \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$, où E_a est l'énergie d'activation de la réaction, grandeur positive. Cette loi montre que $k(T)$ est une fonction croissante de T : les réactions chimiques sont donc accélérées par une augmentation de la température.

Q2 L'amorçage d'une combustion est facilité si le combustible est à l'état gazeux. En effet, le mélange entre le combustible et le comburant se fait mieux lorsque les deux sont en phase gazeuse. La cinétique de la combustion est donc beaucoup plus rapide en phase gazeuse homogène.

D'autre part, la capacité thermique volumique $c_{p,vol}$ d'un combustible est bien plus petite pour un gaz que pour une phase condensée. Par conséquent, un même volume de combustible recevant une puissance de chauffage donnée verra sa température augmenter beaucoup plus vite et beaucoup plus si le combustible est gazeux plutôt que liquide ou solide.

Q3 Notons :

- T_{ai} la température d'auto-inflammation du papier (232 °C) ;
- T_{ini} la température initiale du papier (20 °C) ;
- τ le taux d'absorption de la lentille (25%) ;
- ϕ le flux surfacique solaire moyen (800 W.m⁻²) ;
- Δt la durée minimale pour l'auto-inflammation ;
- a le diamètre de l'image géométrique du Soleil formée par la lentille dans son plan focal image, sur la feuille de papier.



Le schéma ci-contre représente les rayons lumineux issus des deux points extrêmes du soleil : A_∞ et B_∞ . Les images de ces deux points sont A' et B' . On a donc $A'B' = a$. Et puisque le diamètre angulaire apparent du soleil est α , les rayons lumineux venant de A_∞ sont inclinés de α par rapport à ceux venant de B_∞ . Dans le cadre de l'approximation des petits angles, on a donc $a = f'\alpha$.

La surface de l'image du Soleil vaut donc $S = \frac{\pi}{4} f'^2 \alpha^2$, et la masse de papier associée : $m = \sigma \frac{\pi}{4} f'^2 \alpha^2$.

La puissance reçue par la masse m de papier est égale à $(1 - \tau)$ fois la puissance interceptée par la lentille en provenance du Soleil : $\mathcal{P} = (1 - \tau) \phi \pi r^2$.

On applique le premier principe de la thermodynamique à la masse m de papier, pendant la durée Δt cherchée, en supposant que toute la puissance reçue est absorbée par le papier : $mc(T_{ai} - T_{ini}) = \mathcal{P}\Delta t$. On obtient donc :

$$\sigma \frac{\pi}{4} f'^2 \alpha^2 c (T_{ai} - T_{ini}) = (1 - \tau) \phi \pi r^2 \Delta t$$

$$\text{Par conséquent : } \Delta t = \frac{\sigma c \alpha^2 f'^2}{4(1-\tau) \phi r^2} (T_{ai} - T_{ini}) = \frac{0,1 \times 1400 \times \left(\frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180}\right)^2 \times 0,1^2}{4 \times (1-0,25) \times 800 \times 0,05^2} \approx 4 \text{ ms}.$$

Q4 La valeur trouvée semble vraiment très faible. En réalité, le papier n'absorbe pas toute la puissance reçue mais en réfléchit une partie. De plus, une partie de la puissance reçue est évacuée vers l'extérieur de l'image par diffusion thermique au sein du papier et par rayonnement.

Le choix du papier noir permet de minimiser la fraction de puissance re-rayonnée par le papier.

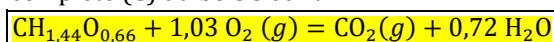
I.B. Combustion du bois

Q5 Les données sont les fractions massiques du carbone, de l'hydrogène et de l'oxygène dans le bois, considéré de formule chimique CH_xO_y : $w_C = 0,50$; $w_H = 0,06$ et $w_O = 0,44$.

$$\text{On a : } w_C = \frac{M_C}{M_C + xM_H + yM_O}, w_H = \frac{xM_H}{M_C + xM_H + yM_O} \text{ et } w_O = \frac{yM_O}{M_C + xM_H + yM_O},$$

$$\text{d'où : } x = \frac{w_H M_C}{w_C M_H} = 1,44 \text{ et } y = \frac{w_O M_C}{w_C M_O} = 0,66. \text{ La formule chimique du bois est donc bien : } \text{CH}_{1,44}\text{O}_{0,66}.$$

Q6 L'équation bilan de la combustion complète (C) du bois s'écrit :



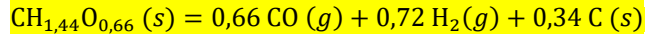
Q7 On note $Q_{fournie}$ l'énergie thermique dégagée par la combustion complète d'une masse m de bois, avec obtention d'eau vapeur, de façon isobare, en proportions stoechiométriques. Le **premier principe appliqué à l'ensemble des réactifs et produits** s'écrit : $\Delta H = -Q_{fournie}$.

D'où $\Delta_r H^\circ (\xi_f - \xi_i) = -Q_{fournie}$, c'est-à-dire $\Delta_r H^\circ \left(\frac{m}{M_{CH_{1,44}O_{0,66}}} - 0 \right) = -Q_{fournie}$.

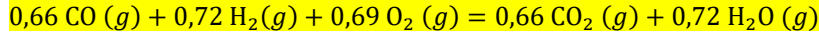
On en déduit $\frac{\Delta_r H^\circ}{M_{CH_{1,44}O_{0,66}}} = -\frac{Q_{fournie}}{m}$, c'est-à-dire $\frac{\Delta_r H^\circ}{M_{CH_{1,44}O_{0,66}}} = -PCI$,

donc : $\Delta_r H^\circ = -M_{CH_{1,44}O_{0,66}} PCI = -(12 + 1,44 + 0,66 \times 16) \times 19.10^3 = -456 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

Q8 L'équation bilan de la pyrolyse (P) s'écrit :



La réaction de combustion des gaz de pyrolyse est la réaction (2) :



On applique la loi de Hess : $\Delta_r H^\circ (2) = -0,66 \Delta_f H^\circ (\text{CO}, g) + 0,66 \Delta_f H^\circ (\text{CO}_2) + 0,72 \Delta_f H^\circ (\text{H}_2\text{O}, g)$

$$\Delta_r H^\circ (2) = -0,66 \times (-110,6) + 0,66 \times (-393,5) + 0,72 \times (-241,8) = -361 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On constate que la **combustion des gaz de pyrolyse est nettement exothermique** ; elle doit donc permettre d'entretenir la **réaction de pyrolyse** qui, elle, doit être endothermique.

En effet, en notant (3) la réaction de combustion de la braise : $0,34 \text{ C} (s) + 0,34 \text{ O}_2 (g) = 0,34 \text{ CO}_2 (g)$,

On a : $(C) = (P) + (2) + (3)$, donc $\Delta_r H^\circ (P) = \Delta_r H^\circ - \Delta_r H^\circ (2) - \Delta_r H^\circ (3)$,

C'est-à-dire $\Delta_r H^\circ (P) = -456 + 361 - (0,34 \times -393,5) = +38,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Q9 C'est un calcul classique type « température de flamme ».

L'évolution est adiabatique et isobare. Pour le système constitué de la pièce et de la bûche, le **premier principe** s'écrit : $\Delta H = 0$. En passant par un chemin fictif constitué d'abord de la réaction isobare et isotherme, puis du réchauffement isobare de la pièce, l'équation devient, en négligeant les capacités thermiques des produits de la réaction, et en supposant que l'hygrométrie permet à l'eau formée de rester sous forme vapeur :

$$\Delta_r H^\circ \xi_f + C(T_f - T_i) = 0 ; \text{ c'est-à-dire } -PCI \times m + C(T_f - T_i) = 0$$

$$\text{On en déduit } T_f = T_i + \frac{PCI \times m}{C} = 20 + \frac{19.10^6}{6,0.10^5} = 52^\circ\text{C}.$$

Cette valeur est manifestement **très excessive** ! En réalité, la transformation n'est évidemment **pas adiabatique**. La combustion d'une bûche est un processus lent, et donc les fuites thermiques ne sont sûrement pas négligeables.

I.C. Propagation de la chaleur dans le combustible

Q10 Les trois modes de transfert thermique sont :

- la **conduction** : transfert thermique dans un milieu matériel au repos (solide, liquide, gazeux), dû aux échanges énergétiques à l'échelle microscopique ;
- la **convection** : transfert thermique dû aux mouvements du milieu support (liquide ou gazeux) ;
- le **rayonnement** : transfert thermique dans un milieu transparent ou dans le vide, par propagation d'ondes électromagnétiques.

Q11 On peut s'appuyer sur la figure 1 de l'énoncé pour répondre : le **rayonnement des flammes et la convection réchauffent la partie du bois non encore en feu** ; cela provoque notamment la sortie de l'humidité. L'effet du rayonnement et de la convection est important, on le voit bien en brûlant une allumette : selon la façon dont on la penche, elle brûle plus ou moins vite.

Il est bien connu que la convection forcée augmente sensiblement la propagation du feu, par rapport à la simple convection naturelle : le vent pour les incendies de forêt, le soufflet pour allumer le feu de cheminée.

Les **parties solides sont le siège de conduction**, ce qui permet aux parties encore non consommées d'atteindre la température d'inflammation (ce que confirme la question 11).

Q12 Pour effectuer le bilan d'enthalpie demandé, on applique le **1^{er} principe entre t et $t + dt$ à la tranche $[x, x + dx]$:**

$$dH = dt(S j_{cd}(x, t) - S j_{cd}(x + dx, t)) + \mu S dx \mathcal{P}_c dt$$

$$\text{D'où } \mu c_p S dx (T(x, t + dt) - T(x, t)) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) S dx dt + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x + dx, t) S dx dt + \mu S dx \mathcal{P}_c dt$$

$$\text{On obtient donc : } \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa, \text{ avec } D = \frac{\lambda}{\mu c_p} \text{ et } \kappa = \frac{\mathcal{P}_c}{c_p}.$$

Q13 Dans la zone non altérée, il n'y a pas de terme source lié à la combustion. Donc : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Q14 La durée caractéristique de la diffusion thermique est donnée par :

$$\tau_d \approx \frac{L^2}{D} = \frac{0,1^2}{10^{-7}} \approx 10^5 \text{ s} \approx 28 \text{ h}$$

La durée caractéristique de combustion de la poutre est plus difficile à évaluer. Pour une longueur L de poutre, on peut dire que la durée de la combustion correspond au temps qu'il faut pour que l'ensemble de la tranche soit à la température T_c de combustion, sachant qu'au démarrage de la combustion, la température de la tranche s'étalait de

$$T_i \text{ à } T_c : \mu SL \mathcal{P}_c \tau_c \approx \mu SL c_p (T_c - T_i)$$

$$\text{D'où } \tau_c \approx \frac{c_p}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_i) = 100 \text{ s} \approx 2 \text{ min}$$

La combustion est donc un phénomène beaucoup plus rapide que la diffusion, phénomène très lent.

Q15 c est la vitesse de propagation de l'onde recherchée.

Q16 On effectue le changement de variables indiqué et on obtient :
$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \theta'(u) \frac{\partial u}{\partial t} = -c \theta'(u) \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \theta'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = \theta'(u) \end{cases}$$

Par conséquent, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \theta''(u) \frac{\partial u}{\partial x} = \theta''(u)$. On en déduit :

- Dans la zone inaltérée : $\theta''(u) + \frac{c}{D} \theta'(u) = 0$
- Dans la zone de combustion : $\theta''(u) + \frac{c}{D} \theta'(u) = -\frac{\kappa}{D}$

Q17

- Dans la zone 1 définie par $u < u_1$ où $u_1 = x_1(t) - ct$, la température est supposée constante donc $\theta(u < u_1) = Cte = a_1$
- Dans la zone 3 définie par $u > u_2$ où $u_2 = x_2(t) - ct$, $\theta''(u) + \frac{c}{D} \theta'(u) = 0$. Par conséquent, $\theta'(u) = c_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right)$. On en déduit : $\theta(u) = -\frac{D}{c} c_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) + a_3$, ce qui se réécrit bien :

$$\theta(u > u_2) = a_3 + b_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right)$$

- Dans la zone 2 définie par $u_1 < u < u_2$, $\theta''(u) + \frac{c}{D} \theta'(u) = -\frac{\kappa}{D}$. Par conséquent, $\theta'(u) = c_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) - \frac{\kappa}{c}$

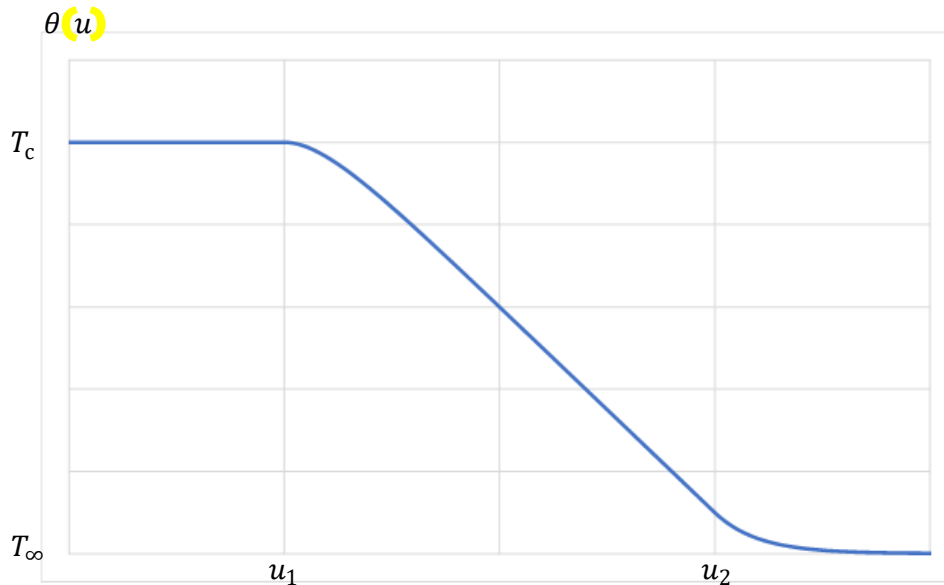
On en déduit : $\theta(u) = -\frac{D}{c} c_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) - \frac{\kappa}{c}u + a_2$, ce qui se réécrit bien :

$$\theta(u) = a_2 + b_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u\right) - \frac{\kappa}{c}u$$

Q18 Comme la température est uniforme et constante dans la zone 1, $a_1 = T_c$.

D'autre part, quand $u \rightarrow \infty$, c'est-à-dire quand $x \rightarrow \infty$ à t fixé, $T \rightarrow T_\infty$ donc $a_3 = T_\infty$.

Q19 La fonction doit être continue et dérivable en u_1 et en u_2 car la température et le flux thermique doivent être continus. On obtient donc l'allure suivante :



Q20 La température doit être continue le long de la poutre (qui est d'un seul tenant) donc :

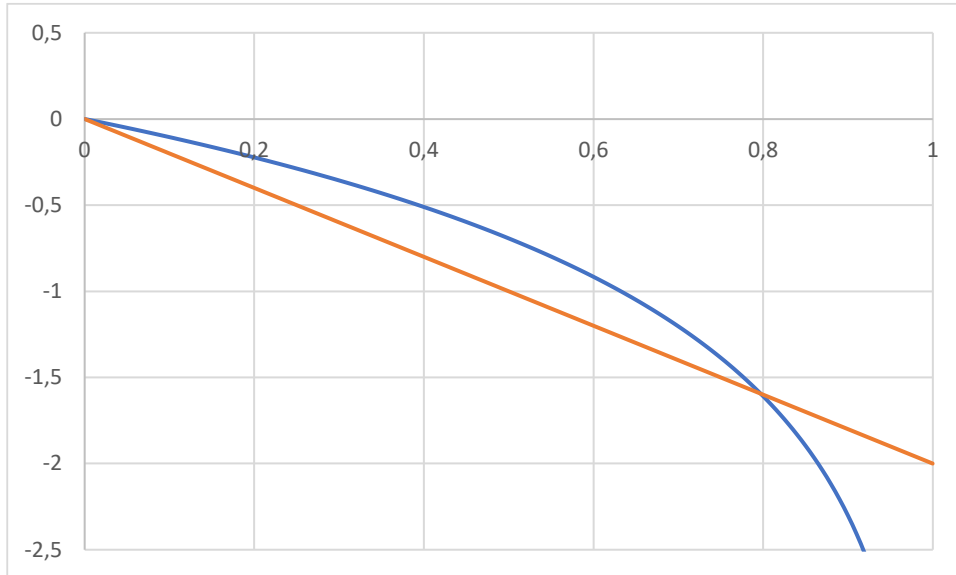
$$\begin{cases} a_2 + b_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u_1\right) - \frac{\kappa}{c}u_1 = T_c \\ a_2 + b_2 \exp\left(-\frac{c}{D}u_2\right) - \frac{\kappa}{c}u_2 = T_\infty + b_3 \exp\left(-\frac{c}{D}u_2\right) \end{cases}$$

On voit que ces deux équations ne suffisent pas à déterminer les trois inconnues a_2 , b_2 et b_3 . Il faut donc ajouter une équation traduisant la **continuité du flux thermique en u_1 ou en u_2** . Choisissons la condition aux limites en u_1 car elle est plus simple. On obtient : $\theta'(u_1^-) = \theta'(u_1^+)$, soit : $0 = \theta'(u_1^+)$, d'où :

$$-\frac{c}{D} b_2 \exp\left(-\frac{c}{D} u_1\right) - \frac{\kappa}{c} = 0, \text{ ou encore : } \boxed{\frac{c}{D} b_2 \exp\left(-\frac{c}{D} u_1\right) = -\frac{\kappa}{c}}.$$

Q21 Posons : $x = \frac{c^2}{\kappa D} (T_i - T_\infty)$. Il s'agit donc de résoudre l'équation : $\ln(1 - x) = -\frac{T_c - T_\infty}{T_i - T_\infty} x = -2x$

Cherchons l'intersection de ces deux courbes :



On constate que les deux courbes se coupent pour $x \approx 0,8$. On en déduit :

$$c \approx \sqrt{\frac{0,8 \kappa D}{T_i - T_\infty}} = \sqrt{\frac{0,8 \times 2 \cdot 10^{-7}}{200}} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

C'est une valeur qui paraît **faible** pour cette célérité !

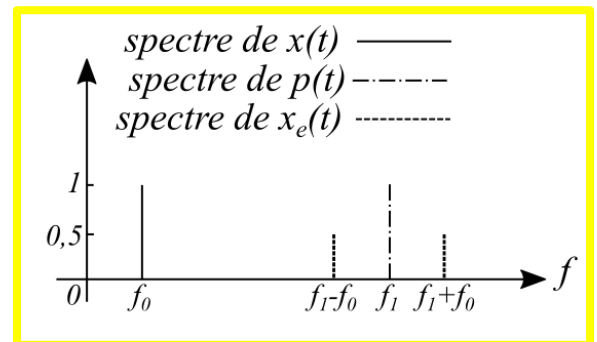
Q22 Le temps de combustion complète d'un mètre de poutre est donc de l'ordre de :

$$\Delta t_{\text{comb}} \approx \frac{L}{c} \approx 10 \text{ h}$$

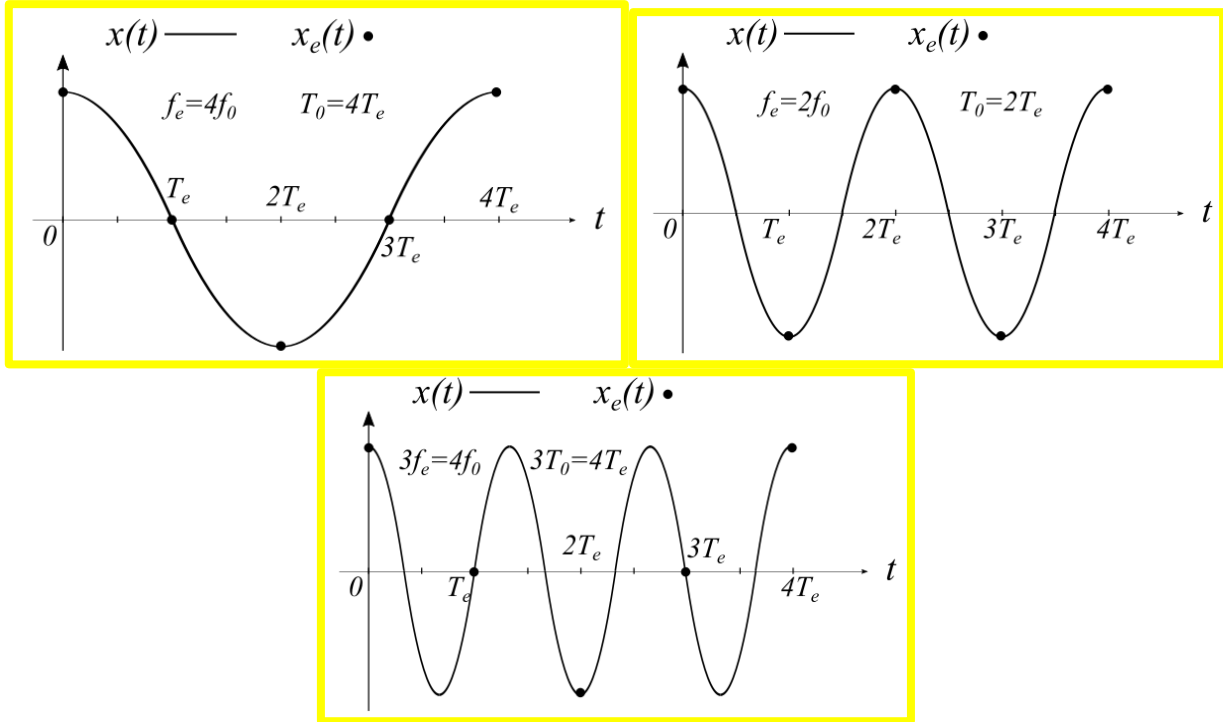
Problème n°2 : Mines Ponts PSI 2022 Ph1 (extrait)

Analyse de Fourier et échantillonnage d'un signal électronique

□ - 1. Les spectres sont donnés ci-contre



□ - 2. Les 3 représentations sont ci-dessous. Dans le **troisième cas**, en observant le signal échantillonné, on a l'impression d'une sinusoïde de période $4T_e$, donc de fréquence $\frac{f_e}{4}$, alors que la fréquence est $\frac{3f_e}{4}$.



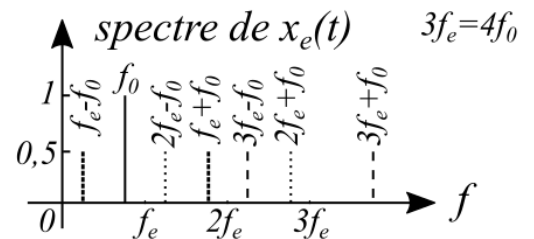
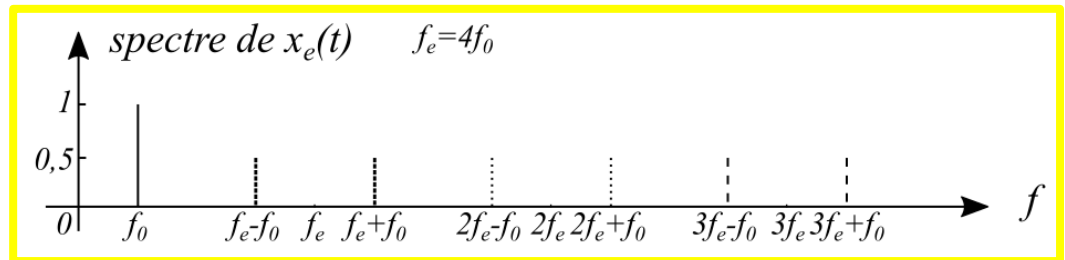
□ - 3. Pour plus de clarté, j'ai regroupé les raies deux par deux : un même type de pointillés pour les deux raies associées au même n de $nf_e + f_0$ et $nf_e - f_0$.

Pour $f_e = 4f_0$, les paires de raies (ce que l'énoncé

appelle les « motifs fréquentiels ») sont bien séparés les uns des autres.

Mais pour $3f_e = 4f_0$, les paires de raies se chevauchent. La conséquence est qu'une des fréquences fantômes est de plus petite valeur que la vraie fréquence f_0 . Il s'agit de la fréquence $f_e - f_0$.

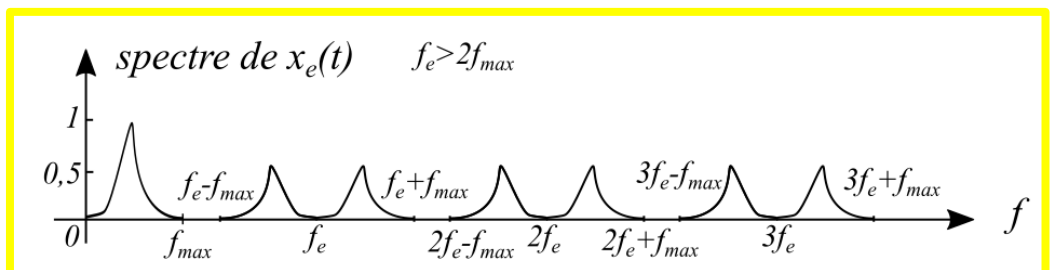
Il s'est produit un **repliement autour de la fréquence $\frac{f_e}{2}$** . En effet, la vraie fréquence f_0 dépassait $\frac{f_e}{2}$ d'une quantité $f_0 - \frac{f_e}{2}$. Et si on retranche cette quantité à $\frac{f_e}{2}$, on obtient bien : $\frac{f_e}{2} - (f_0 - \frac{f_e}{2}) = \frac{f_e}{2} + \frac{f_e}{2} - f_0 = f_e - f_0$.



□ - 4. Les questions 2 et 3 permettent de dire que, pour que les motifs fréquentiels engendrés par l'échantillonnage ne se chevauchent pas, et donc pour qu'il n'existe pas de fréquence fantôme inférieure à la vraie fréquence f_0 , il faut que $f_e - f_0 > f_0$, c'est-à-dire **$f_e > 2f_0$** . C'est bien le critère de Shannon-Nyquist.

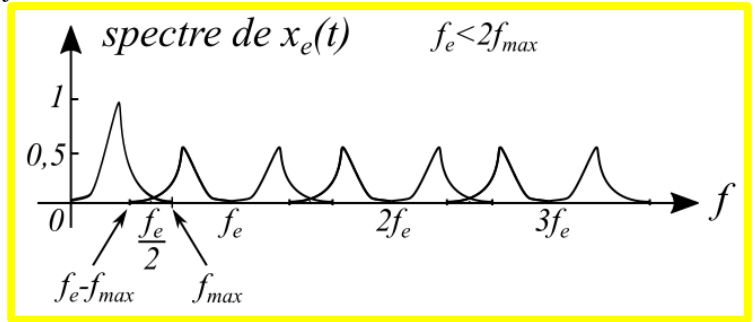
□ - 5. Pour un signal dont le spectre est continu, le critère de Shannon-Nyquist devient **$f_e > 2f_{\max}$** .

Quand il est vérifié, on obtient le premier schéma ci-contre, sans chevauchement.



Quand il n'est pas vérifié, on obtient le second schéma, avec chevauchement.

□ - 6. Sur l'exemple de la question précédente, on voit bien que si le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un **filtre passe-bas** permet de récupérer le spectre du signal analogique (et donc le signal analogique), si la fréquence de coupure du filtre est voisine de $\frac{f_e}{2}$. En revanche, si le critère n'est pas vérifié, en raison du chevauchement des motifs fréquentiels, ce filtrage passe-bas ne redonnera pas le spectre du signal analogique initial.

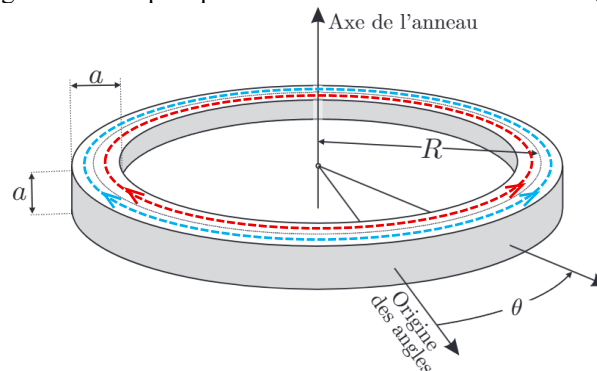


□ - 7. Notons N_b le nombre de bits. Le nombre de bits à stocker est $N = \Delta t \times f_e \times N_b \times 2$, et donc le nombre d'octets est $N_o = \frac{\Delta t f_e}{8} \times N_b \times 2 = 793 \text{ Mo}$.

□ - 15. Vu que le bilan thermique et la loi de Fourier ne sont exploités que plus loin, on attend ici un simple résultat du cours, ou une analyse dimensionnelle : $D = \frac{\lambda}{\mu c}$. Pour le fer, $D = \frac{80}{7,9 \cdot 10^3 \times 400} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. $\tau = \frac{L^2}{D}$. Numériquement, $\tau = 9,9 \cdot 10^3 \text{ s}$

□ - 16. Loi de Fourier : $\vec{J}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$ donc ici, comme T ne dépend spatialement que de θ , $\vec{J}_{th} = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}(\theta, t) \vec{e}_\theta$.

La figure ci-dessous montre deux lignes de champ en pointillés. Ce sont des cercles d'axe (Oz).



□ - 17. Volume $dV = a^2 R d\theta$ et surface de contact avec l'air $dS_{lat} = 4aR d\theta$.

On applique le premier principe à la matière contenue dans le volume dV , entre t et $t + dt$:

$$\mu c (T(\theta, t + dt) - T(\theta, t)) a^2 R d\theta = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta}(\theta, t) a^2 dt - \left(-\frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta}(\theta + d\theta, t) a^2 dt \right) - 4haR d\theta (T(\theta, t) - T_e) dt$$

$$D'où \mu c (T(\theta, t + dt) - T(\theta, t)) d\theta = -\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial T}{\partial \theta}(\theta, t) dt - \left(-\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial T}{\partial \theta}(\theta + d\theta, t) dt \right) - \frac{4h}{a} d\theta (T(\theta, t) - T_e) dt$$

$$\text{Puis } \mu c \frac{T(\theta, t + dt) - T(\theta, t)}{dt} = \frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial T}{\partial \theta}(\theta + d\theta, t) - \frac{\partial T}{\partial \theta}(\theta, t) - \frac{4h}{a} (T(\theta, t) - T_e)$$

C'est-à-dire $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{4h}{a} (T - T_e)$, ce qui est bien la formule demandée.

□ - 18. En régime stationnaire, le premier membre s'annule, d'où $\frac{d^2 T}{d\theta^2} - \frac{4hR^2}{\lambda a} T = -\frac{4hR^2}{\lambda a} T_e$

$$\text{Ou, en introduisant comme demandé } \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{4h}}, \quad \frac{d^2 T}{d\theta^2} - \frac{R^2}{\delta^2} T = -\frac{R^2}{\delta^2} T_e.$$

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2 = \frac{R^2}{\delta^2}$, et ses solutions $r = \pm \frac{R}{\delta}$.

La solution de l'équation différentielle est donc $T(\theta) = T_e + A \exp\left(-\frac{R}{\delta} \theta\right) + B \exp\left(\frac{R}{\delta} \theta\right)$.

Dans l'équation différentielle $\frac{d^2 T}{d\theta^2} - \frac{R^2}{\delta^2} T = -\frac{R^2}{\delta^2} T_e$, $\frac{R^2}{\delta^2}$ doit être sans dimension, comme $\frac{1}{\theta^2}$, donc δ est homogène à une longueur.

□ - 19. Il est logique que la température soit maximale au point de chauffage, donc pour $\theta = 0$.
 Et aussi que la température soit une fonction paire de θ : la chaleur diffuse autant d'un côté que de l'autre.
 De plus, la seconde courbe correspond bien à l'opposé de la dérivée de la fonction associée à la première courbe, ce qui est conforme à la loi de Fourier $j_{th} = -\frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$.
 Enfin, il est normal que j_{th} s'annule en $\pm\pi$ car les flux thermiques des deux chemins s'y compensent là où la boucle se referme.
 En 0, on obtient $A + B = T_1 - T_e$.
 La parité de la température, et donc aussi de $T - T_e$ entraîne $A = B$ (on doit avoir un cosinus hyperbolique, pas de sinus hyperbolique).
 Finalement, $A = B = \frac{T_1 - T_e}{2}$. Et $T(\theta) = T_e + (T_1 - T_e) \operatorname{ch}\left(\frac{R}{\delta} \theta\right)$.
 Contrairement à ce que demande l'énoncé, A et B ne dépendent pas de R ni δ . Et la fonction qu'on a trouvée est valable sur $[-\pi, \pi]$.

□ - 20. Si on néglige la conducto-convection, le temps caractéristique du problème thermique est $\frac{R^2 \pi^2 \mu c}{\lambda}$, donc de l'ordre de 10^4 secondes, ce qui fait 2,8 heures. On retrouve l'ordre de grandeur.

□ - 21. En l'absence de conducto-convection, l'équation aux dérivées partielles de la question 17 devient :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

On remplace par la solution proposée, d'où $\mu c f_n(\theta) g'_n(t) = \frac{\lambda}{R^2} f''_n(\theta) g_n(t)$, que l'on peut encore écrire :

$$\frac{\mu c g'_n(t)}{g_n(t)} = \frac{\lambda}{R^2} \frac{f''_n(\theta)}{f_n(\theta)}$$

Cette équation devant être vérifiée pour tout t et pour tout θ , et vu que le premier membre ne dépend pas de θ , et que le second ne dépend pas de t , les deux membres sont égaux à une constante K_1 .

On arrive ainsi à deux équations différentielles : $g'_n(t) = K_1 \frac{g_n(t)}{\mu c}$ et $f''_n(\theta) = K_1 \frac{R^2}{\lambda} f_n(\theta)$.

Physiquement, la constante K_1 est nécessairement négative, sinon les solutions divergeraient dans le temps. Posons donc $K_1 = -K_2$, avec $K_2 > 0$.

Les équations différentielles sont : $g'_n(t) + K_2 \frac{g_n(t)}{\mu c} = 0$ et $f''_n(\theta) + K_2 \frac{R^2}{\lambda} f_n(\theta) = 0$.

Les solutions sont de la forme $g_n(t) = K_3 e^{-\frac{K_2 t}{\mu c}}$ et $f_n(\theta) = K_4 \cos\left(R \sqrt{\frac{K_2}{\lambda}} \theta + \varphi\right)$. Mais on peut prendre $\varphi = 0$ car la température doit être maximale en $\theta = 0$.

D'où $T_n(\theta, t) = K_5 \cos\left(R \sqrt{\frac{K_2}{\lambda}} \theta\right) e^{-\frac{K_2 t}{\mu c}}$, qui est bien de la forme demandée, avec $d_n = \sqrt{\frac{\lambda}{K_2}}$ et $\tau_n = \frac{\mu c}{K_2}$.

La relation entre les deux paramètres est donc $\frac{d_n^2}{\tau_n} = \frac{\lambda}{\mu c}$.

Pour que l'argument du cosinus soit sans dimension, il faut que d_n soit homogène à une longueur.

Pour que l'argument de l'exponentielle soit sans dimension, il faut que τ_n soit homogène à un temps.

□ - 22. La constante T_m représente la température moyenne de l'anneau dans les conditions initiales (à $t = 0$). Et c'est donc aussi la température vers laquelle va tendre l'ensemble de l'anneau puisqu'il n'y a quasiment pas de chaleur qui s'en échappe, et qu'on n'entretient plus le chauffage en $\theta = 0$ dans cette question.

On peut justifier la solution proposée par le fait qu'à $t = 0$, on a une répartition de température donnée par une somme infinie de termes, et aussi que les T_n vus à la question 22 convergent tous vers 0, ce qui va permettre de retrouver T_m .

En faisant $t = 0$, on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta)$, d'où $B_n = b_n$, $d_n = \frac{R}{n}$, $\tau_n = \frac{\mu c R^2}{\lambda n^2}$.

□ - 23. Plus n est élevé, plus les pics de température sont proches les uns des autres, et donc plus ces pics locaux s'effacent rapidement, car le temps caractéristique de la diffusion varie comme le carré de la distance caractéristique.