

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Corrections de quelques exercices

[11] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{1}{xn^2 + 1}$.

1. Soit $x \in]0, +\infty[$.

[1] On a $\frac{1}{xn^2 + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{xn^2}$.

[2] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{xn^2} \geq 0$.

[3] La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x} \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$ ($\frac{1}{x}$ est une constante multiplicative).

On en déduit par comparaison par équivalent que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Ainsi :

la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

2. Notons φ la fonction nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $x_n = \frac{1}{n^2}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in]0, +\infty[$ et :

$$f_n(x_n) - \varphi(x_n) = \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0.$$

On en déduit que :

la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$ vers la fonction nulle.

Par le cours, on sait que si une série converge uniformément sur un intervalle alors son terme général converge uniformément vers la fonction nulle sur cet intervalle.

Par contraposée, on en déduit que :

la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

3. Soit $a \in]0, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction $x \mapsto |f_n(x)| = \frac{1}{xn^2 + 1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque $n^2 > 0$), elle atteint un maximum en a sur $[a, +\infty[$, qui vaut $f_n(a)$.

On a donc $\|f_n\|_{\infty}^{[a, +\infty[} = f_n(a)$.

Or, par la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$ (question 1), comme $a \in]0, +\infty[$, on sait que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(a)$ converge.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty}^{[a, +\infty[}$ converge c'est-à-dire :

la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Autre réponse possible : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [a, +\infty[$.

On a $|f_n(x)| = \frac{1}{xn^2 + 1} \leq \underbrace{\frac{1}{an^2}}_{\text{ne dépend pas de } x}$ car $xn^2 + 1 \geq an^2 > 0$.

Ainsi, $\frac{1}{an^2}$ est un majorant de l'ensemble $\{|f_n(x)|, x \in [a, +\infty[\}$.

Or, $\|f_n\|_\infty^{[a, +\infty[} = \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)|$ est le plus petit des majorants de cet ensemble donc $\|f_n\|_\infty^{[a, +\infty[} \leq \frac{1}{an^2}$.

[1] On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty^{[a, +\infty[} \leq \frac{1}{an^2}$.

[2] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty^{[a, +\infty[} \geq 0$.

[3] La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a} \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$).

On en déduit par comparaison par inégalité que la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty^{[a, +\infty[}$ converge d'où le résultat.

[12] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (-1)^n \times \frac{1}{\sqrt{n+x}}$ avec $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \geq 0$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ est donc une série alternée.

La suite $(|f_n(x)|)_{n \geq 1} = \left(\frac{1}{\sqrt{n+x}} \right)_{n \geq 1}$ est décroissante et converge vers 0.

Par le théorème spécial des séries alternées, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

On a ainsi prouvé que :

la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. On sait déjà (question 1) que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Montrons que la suite des restes $(R_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle (que l'on note φ).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a par le théorème spécial des séries alternées (dont les hypothèses ont été vérifiées à la question 1) :

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x)|, x \in \mathbb{R}_+\}$.

Or, $\|R_n - \varphi\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |R_n(x) - \varphi(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |R_n(x)|$ est le plus petit des majorants de cet ensemble.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq \|R_n - \varphi\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n - \varphi\|_\infty^{\mathbb{R}_+} = 0.$$

Cela signifie que la suite $(R_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

Ainsi :

la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

3. Considérons le cas où $x = 0 \in \mathbb{R}_+$.

La série $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann avec $\frac{1}{2} \leq 1$).

Or, on sait par le cours que la convergence normale d'une série sur un intervalle implique la convergence absolue en tout point de cet intervalle.

Par contraposée, on en déduit que :

la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Autre réponse possible : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de la fonction $x \mapsto |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n+x}}$ sur $\mathbb{R}_+$, cette fonction admet un maximum en 0 qui vaut $|f_n(0)| = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, ce qui permet de conclure par définition de la convergence normale.

13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Cas $x = 0$: La série $\sum_{n \geq 2} f_n(0) = \sum_{n \geq 2} 0$ converge.

Cas $x > 0$: On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-nx} = 0$ par croissances comparées ($x > 0$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 f_n(x) = 0$ par produit.

1 On a donc $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2 On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} \geq 0$.

3 La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$.

Par comparaison par négligeabilité, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 2} f_n(x)$ converge.

Ainsi :

la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Autre réponse possible : Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Cas $x = 0$: La série $\sum_{n \geq 2} f_n(0) = \sum_{n \geq 2} 0$ converge.

Cas $x > 0$: On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f_n(x) > 0$ et :

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(\ln n) e^{-(n+1)x}}{\ln(n+1) e^{-nx}} = e^{-x} \frac{\ln n}{\ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} \frac{\ln n}{\ln n} = e^{-x}$$

car $\ln(1 + \frac{1}{n}) = o(\ln n)$.

Comme $e^{-x} < 1$, on en déduit par le théorème de d'Alembert que la série $\sum_{n \geq 2} f_n(x)$ converge.

D'où la conclusion.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Déterminons $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$.

La fonction $|f_n| = f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'_n(x) = \frac{1}{\ln n} (e^{-nx} + x(-n)e^{-nx}) = (1 - nx) \frac{e^{-nx}}{\ln n} \text{ du signe de } 1 - nx.$$

On en déduit que la fonction f_n est croissante sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$.

Ainsi, elle admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$, atteint en $\frac{1}{n}$, qui vaut $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1}}{n \ln n}$.

Comme $e^{-1} \neq 0$, la série $\sum_{n \geq 2} \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = \sum_{n \geq 2} \frac{e^{-1}}{n \ln n}$ est de même nature que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.

(Il s'agit d'une série de Bertrand, avec une puissance égale à 1 sur le n . On va utiliser une comparaison série/intégrale pour déterminer la nature de cette série.)

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$ (car la fonction $x \mapsto x \ln x$ est croissante sur $[2, +\infty[$, comme produit de deux fonctions croissantes et positives sur $[2, +\infty[$, et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ d'où le résultat par composition avec la fonction décroissante $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$).

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $k \geq 2$:

$$\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. En sommant les inégalités précédentes entre 2 et $n-1$, en appliquant la relation de Chasles et en opérant un changement d'indice, on obtient :

$$S_n - \frac{1}{2 \ln 2} \leq \int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx \leq S_n - \frac{1}{n \ln n}.$$

On a donc en particulier :

$$\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx + \frac{1}{n \ln n} \leq S_n.$$

Or, $\int_2^n \frac{1/x}{\ln x} dx = [\ln |\ln x|]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{n \ln n} \right) = +\infty$, on en déduit par l'inégalité précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge donc la série $\sum_{n \geq 2} \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+}$ diverge donc :

la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Autre réponse possible : En posant directement pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $x_n = \frac{1}{n}$, on obtient une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telle que $\sum_{n \geq 2} f_n(x_n) = \sum_{n \geq 2} \frac{e^{-1}}{n \ln n}$ diverge. Or, si la série $\sum_{n \geq 2} f_n$ convergerait normalement sur $\mathbb{R}_+$ alors comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $0 \leq f_n(x_n) \leq \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+}$, on obtiendrait la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} f_n(x_n)$ par comparaison par inégalité. D'où le résultat.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq n+1$:

$$0 \leq f_k(x) = \frac{x e^{-kx}}{\ln k} \leq \frac{x e^{-kx}}{\ln(n+1)} = \frac{x}{\ln(n+1)} (e^{-x})^k.$$

On sait que la série $\sum_{k \geq n+1} f_k(x)$ converge (d'après la question 1) et la série $\sum_{k \geq n+1} (e^{-x})^k$ est une série géométrique de raison e^{-x} avec $|e^{-x}| = e^{-x} < 1$ donc elle converge.

Par linéarité et croissance, on en déduit que :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (e^{-x})^k = \frac{x}{\ln(n+1)} \frac{e^{-x(n+1)}}{1 - e^{-x}} \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \quad \text{car } -nx \leq 0.$$

On a donc obtenu les inégalités souhaitées :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}.$$

On sait par la question 1 que la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons que la suite des restes $(R_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle, en notant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a par ce qui précède :

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

On sait en effet que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t \geq t + 1$ par convexité de la fonction exponentielle.

On a donc ici $e^x - 1 \geq x > 0$ donc $\frac{x}{e^x - 1} \leq 1$.

Comme de plus $R_n(0) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq R_n(x) \leq \underbrace{\frac{1}{\ln(n+1)}}_{\text{ne dépend pas de } x}$.

Ainsi, $\frac{1}{\ln(n+1)}$ est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x) - \varphi(x)|, x \in \mathbb{R}_+\}$ (où φ est la fonction nulle) et $\|R_n - \varphi\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+}$ est le plus petit des majorants de cet ensemble.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $0 \leq \|R_n - \varphi\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n - \varphi\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} = 0$.

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n \geq 2} f_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+}.$$

Autre réponse possible : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a par ce qui précède :

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et elle admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.

En effet, $e^y - 1 \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$ donc $1 - e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ d'où $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Par ailleurs, on a par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Par un corollaire du théorème des bornes atteintes (*), on en déduit que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x)| \leq M$.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq R_n(x) \leq \frac{M}{\ln(n+1)}$ et cette inégalité est encore valable en 0.

$\frac{M}{\ln(n+1)}$ est donc un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x) - \varphi(x)|, x \in \mathbb{R}_+\}$ et on conclut comme précédemment.

Preuve () :* Comme f admet une limite finie en 0^+ , on peut la prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (on note encore f ce prolongement sur $\mathbb{R}_+$).

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [a, +\infty[$, $|f(x)| \leq 1$.

Comme la fonction f est continue sur le segment $[0, a]$, elle est bornée sur $[0, a]$ donc il existe $m \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [0, a]$, $|f(x)| \leq m$.

En notant $M = \max(1, m)$, on obtient pour tout $x \in]0, +\infty[$, $|f(x)| \leq M$.