

Rappeler la définition de l'assertion

*la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur I
vers la fonction f .*

Rappeler la définition de l'assertion

la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I .

*Comment étudie-t-on la convergence simple d'une suite de
fonctions ? d'une série de fonctions ?*

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

*À quelle condition nécessaire et suffisante la suite de fonctions
 (f_n) converge-t-elle uniformément sur I vers f ?*

*Comment peut-on prouver que la suite (f_n) converge
uniformément sur I vers f ?*

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

*À quelles conditions nécessaires et suffisantes la série de
fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur I ?*

*Comment peut-on prouver que la série $\sum f_n$ converge
uniformément sur I ?*

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

★ On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur I vers la fonction f lorsque pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \geq 0}$ converge vers $f(x)$ c'est-à-dire pour tout $x \in I$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.

★ On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I lorsque pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.

★ Pour étudier la convergence simple, on travaille avec un réel x fixé quelconque (*Rédaction : Soit $x \in I$.*)

Pour une suite, on étudie la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque n tend vers $+\infty$ et pour une série, on étudie la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$.

Il peut y avoir à distinguer des cas en fonctions des valeurs de x . On conclut pour la suite ou la série de fonctions sur I lorsque tous les cas ont été traités.

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty}^I = 0$.

Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_{\infty}^I = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ (par convention, cette quantité vaut $+\infty$ lorsque la fonction $f_n - f$ n'est pas bornée sur I).

Pour prouver que (f_n) converge uniformément vers f sur I , on peut :

★ Calculer explicitement $\|f_n - f\|_{\infty}^I$ à partir d'un certain rang (par exemple en étudiant les variations de la fonction $|f_n - f|$ ou $f_n - f$) puis vérifier qu'on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty}^I = 0$.

★ À partir d'un certain rang, obtenir $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq u_n$ avec u_n qui ne dépend pas de x , en déduire l'inégalité $\|f_n - f\|_{\infty}^I \leq u_n$.

Vérifier que la suite (u_n) converge vers 0 et conclure par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty}^I = 0$.

La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si elle converge simplement sur I et la suite des restes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Pour prouver que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I , on peut :

★ Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur I (puisque la convergence normale implique la convergence uniforme).

★ Commencer par prouver la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur I . À partir d'un certain rang, obtenir :

$$\forall x \in I, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq u_n \text{ avec } u_n \text{ qui ne dépend pas de } x,$$

en déduire l'inégalité $\|R_n\|_{\infty}^I \leq u_n$. Vérifier que la suite (u_n) converge vers 0 et conclure par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty}^I = 0$.

↪ Penser au théorème spécial des séries alternées pour majorer $|R_n(x)|$ lorsque c'est pertinent ou à une comparaison série/intégrale.

Comment peut-on prouver que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur I ?

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Comment peut-on prouver que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas normalement sur I ?

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Comment peut-on prouver que la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur I ?

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

On commence par étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur I .
Supposons qu'on ait prouvé que la suite (f_n) converge simplement sur I vers la fonction f .

S'il y a convergence uniforme sur I , ce ne peut être que vers la fonction f .

Pour prouver que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I , on peut :

- ★ Remarquer que toutes les fonctions f_n (à partir d'un certain rang) sont continues sur I mais que f ne l'est pas.
- ★ Trouver une suite (x_n) d'éléments de I telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tende pas vers 0.
- ★ Calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty^I$ à partir d'un certain rang (par exemple en étudiant les variations de la fonction $|f_n - f|$ ou $f_n - f$), conclure directement si les fonctions $f_n - f$ ne sont pas toutes bornées à partir d'un certain rang et sinon, vérifier que la suite $(\|f_n - f\|_\infty^I)$ ne converge pas vers 0.

Pour prouver que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge pas normalement sur I , on peut :

- ★ Montrer qu'il existe un réel x de I tel que la série $\sum |f_n(x)|$ diverge (car la convergence normale implique la convergence absolue en tout point de I).
- ★ Plus général : montrer qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de I telle que la série $\sum |f_n(x_n)|$ diverge.
- ★ Calculer explicitement $\|f_n\|_\infty^I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par exemple en étudiant les variations de la fonction $|f_n|$ ou f_n), conclure directement si les fonctions f_n ne sont pas toutes bornées sur I et sinon, vérifier que la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty^I$ diverge.
- ★ Montrer que la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur I (puisque la convergence normale implique la convergence uniforme).

- ★ On peut montrer que le terme général (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur I .
- ★ En supposant qu'il y a convergence simple de la série $\sum f_n$ sur I (sinon il n'y a clairement pas convergence uniforme), on peut montrer que la suite des restes (R_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur I .

On renvoie alors aux méthodes pour montrer qu'une suite ne converge pas uniformément sur I .

Indiquer les liens logiques ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$) valables entre les assertions suivantes pour une suite de fonctions (f_n) quelconque.

- ★ On suppose $I \subset J$. (f_n) converge uniformément sur I
.... (f_n) converge uniformément sur J .
- ★ On suppose $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$. (f_n) converge uniformément sur I_1 , sur I_2 et sur I_3 (f_n) converge uniformément sur I .
- ★ (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$
.... (f_n) converge uniformément sur $]0, +\infty[$.
- ★ (f_n) converge uniformément sur tout segment de I
.... (f_n) converge uniformément sur I .

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Quelle est la définition de l'assertion la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$
converge normalement sur I ?

Comment peut-on prouver la convergence normale de $\sum_{n \geq 0} f_n$
sur I ?

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Quelles sont les inégalités à connaître pour les fonctions
exponentielle, logarithme et sinus ?

Donner l'idée de la preuve.

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Toutes les implications non indiquées sont fausses en général (il y a des contre-exemples dans le cours et les exercices).

★ On suppose $I \subset J$.

(f_n) converge uniformément sur $I \Leftarrow (f_n)$ converge uniformément sur J .

★ On suppose que $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$.

(f_n) converge uniformément sur I_1 , sur I_2 et sur $I_3 \Leftrightarrow (f_n)$ converge uniformément sur I .

★ (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0 \Leftarrow (f_n)$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

L'autre implication est fausse en général, même si on a $]0, +\infty[= \bigcup_{a>0} [a, +\infty[$ (car c'est une union infinie).

★ (f_n) converge uniformément sur tout segment de $I \Leftarrow (f_n)$ converge uniformément sur I .

On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur I lorsque la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_I^\infty$ converge.

Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_I^\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ (par convention, cette quantité vaut $+\infty$ lorsque la fonction f_n n'est pas bornée sur I).

Pour prouver que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur I , on peut :

★ Calculer explicitement $\|f_n\|_I^\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par exemple en étudiant les variations de la fonction $|f_n|$ ou f_n), s'assurer que les fonctions f_n sont toutes bien bornées et que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_I^\infty$ converge.

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, obtenir $\forall x \in I, |f_n(x)| \leq u_n$ avec u_n qui ne dépend pas de x , en déduire l'inégalité $\|f_n\|_I^\infty \leq u_n$.

Vérifier que la série $\sum u_n$ converge et conclure par comparaison par inégalité.

★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

Cette inégalité découle de la convexité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$: sa courbe représentative se trouve au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

★ Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

Cette inégalité découle de la concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$: sa courbe représentative se trouve en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0.

Cette inégalité peut aussi s'écrire : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln(x) \leq x - 1$.

★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq 1$ et $|\sin(x)| \leq |x|$.

La deuxième inégalité peut être obtenue par l'inégalité des accroissements finis appliquée sur $\mathbb{R}$ entre les points 0 et x , en constatant que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin'(t)| = |\cos(t)| \leq 1$.

Quels sont les différents types de convergence pour une suite de fonctions ? pour une série de fonctions ?

Quelles sont les implications existant entre les différents types de convergence ?

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

*Soit a et b deux réels avec $a \leq b$.
Donner un majorant de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[a, b]$.*

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Soit f une somme de série de fonctions : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Donner des hypothèses permettant d'obtenir :

- ★ la bonne définition de f sur I ,
- ★ la continuité de f sur I ,
- ★ la dérivabilité de f sur I et l'expression de sa dérivée,
- ★ l'existence et la valeur de la limite de f en une borne de I .

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

★ Pour une suite de fonctions : convergence simple et convergence uniforme.
La convergence uniforme implique la convergence simple.

★ Pour une série de fonctions : convergence simple, convergence uniforme et convergence normale.
La convergence normale implique la convergence uniforme.
La convergence uniforme implique la convergence simple.

Il faut faire attention car la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$!
Posons $\alpha = \max(|a|, |b|)$. On a pour tout $x \in [a, b]$:

$$-\alpha \leq -|a| \leq a \leq x \leq b \leq |b| \leq \alpha \text{ donc } |x| \leq \alpha.$$

Par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$\forall x \in [a, b], |x|^2 = x^2 \leq \underbrace{\alpha^2}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

Ainsi, α^2 est un majorant de $x \mapsto x^2$ sur $[a, b]$.

★ *Bonne définition de f sur I :*

f est bien définie sur I si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bien définie sur I et la série $\sum f_n$ converge simplement sur I .

★ *Continuité de f sur I :*

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \\ \boxed{2} \quad \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}).$$

★ *Classe $\mathcal{C}^1$ de f sur I (qui donne a fortiori la dérivabilité) :*

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}) \\ \boxed{2} \quad \sum f_n \text{ cv simplement sur } I \\ \boxed{3} \quad \sum f'_n \text{ cv uniformément sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}) \text{ et } \forall x \in I, f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$$

★ *Limite de f en une borne a de I :*

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_n \in \mathbb{K} \\ \boxed{2} \quad \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Soit f une somme de séries de fonctions : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
Donner des hypothèses permettant de prouver que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur I .

Comment peut-on montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ?

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Soit f une somme de séries de fonctions : $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

On souhaite prouver une propriété sur f en utilisant un théorème du cours mais l'hypothèse de convergence uniforme n'est pas vérifiée sur I (ou semble difficile à établir sur I).

Quelles sont les options possibles dans les situations suivantes :

- a) pour montrer que f est continue / de classe $\mathcal{C}^p$ / de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ?
- b) pour déterminer la limite de f en une borne a de I ?

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

★ Sous quelles hypothèses peut-on échanger les symboles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{ et } \int_a^b ?$$

★ Sous quelles hypothèses peut-on échanger les symboles

$$\int_a^b \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} ?$$

$$\text{Et si la somme est finie } \sum_{n=0}^N ?$$

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

★ Sous les hypothèses suivantes :

- 1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^4(I, \mathbb{K}),$
- 2 $\sum f_n$ converge simplement sur $I,$
- 3 $\sum f'_n, \sum f''_n$ et $\sum f_n^{(3)}$ convergent simplement sur $I,$
- 4 $\sum f_n^{(4)}$ converge uniformément sur $I,$

alors $f \in \mathcal{C}^4(I, \mathbb{K})$ et $\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall x \in I, f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$

★ Pour montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$, on peut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (ou à partir d'un certain rang $K \in \mathbb{N}^*$ seulement), $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{K}).$

Il suffit donc de vérifier les hypothèses :

- 1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}),$
- 2 $\forall k \in \mathbb{N}$ avec $k < K, \sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur $I,$
- 3 $\forall k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq K, \sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $I.$

a) Ces propriétés étant des propriétés locales, il suffit de les vérifier sur tout segment inclus dans I . On peut donc se contenter de prouver la convergence uniforme sur un segment quelconque de I . On pourra alors conclure par le théorème du cours à la continuité / la classe $\mathcal{C}^p$ / la classe $\mathcal{C}^\infty$ de f sur tout segment inclus dans I et donc sur I .

b) Pour appliquer le théorème de la double-limite, on peut changer l'intervalle I pour un autre intervalle J inclus dans I , tant que a est toujours une borne de I .

★ Sous les hypothèses (a et b sont deux réels) :

- 1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}),$
- 2 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b],$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt.$

★ Sous les hypothèses (a et b sont deux réels) :

- 1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}),$
- 2 $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b],$

alors $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right).$

Pour une somme finie, la continuité des fonctions f_n sur $[a, b]$ suffit pour avoir le résultat par linéarité de l'intégrale.