

Exercice 1

Racines n -ièmes complexes
d'une matrice non diagonalisable

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

et n un entier supérieur ou égal à 2.

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les **racines n -ièmes de la matrice A** , c'est-à-dire les matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $R^n = A$.

On notera que, même si la matrice A est à coefficients réels, on autorisera la matrice R à présenter des coefficients complexes.

On introduit le polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.

- 1) a. Factoriser le polynôme P .
- b. Vérifier que P est un polynôme annulateur de la matrice A (on peut le faire sans calculer A^3).

On introduit les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$:

$$F = \text{Ker}(A - 2I_3) \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}((A - I_3)^2).$$

- 2) a. Déterminer, en justifiant soigneusement, le rang des matrices $A - 2I_3$ et $(A - I_3)^2$.
- b. En déduire la dimension des sous-espaces F et G , puis une base de ces espaces.
- c. Montrer que les espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^3$.

Dans toute la suite de l'exercice, on note u l'application

$$u: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ V \longmapsto AV.$$

- 3) a. Quelle est la matrice de u dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$?
- b. Déterminer une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$ où la matrice de u s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c. Qu'en déduit-on concernant les matrices A et T ?
Cette question ne nécessite aucun calcul. Toutefois, soyez aussi précis que possible dans votre réponse.
- 4) Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$; on note M sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$. Dans les 3 sous-questions qui suivent, on suppose que $M^n = T$.

- a. Montrer que les endomorphismes u et φ commutent.
- b. Justifier que les sous-espaces F et G sont stables par φ . En déduire que la matrice M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & Y \end{pmatrix}, \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{C} \text{ et } Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

- c. Montrer que les matrices Y et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ commutent.
En déduire que Y est de la forme

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{C}^2.$$

- d. En écrivant Y sous la forme $Y = aI_2 + bN$, pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de la matrice Y^n en fonction de n, a et b .

5) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice quelconque.

- a. Rappeler les formules explicites des racines n -ièmes de l'unité (on les notera ω_k).
Donner ensuite les racines n -ièmes complexes du nombre 2.
- b. Résoudre l'équation matricielle $M^n = T$, d'inconnue M .
Combien cette équation admet-elle de solutions ?
- c. En déduire la liste complète de matrices R telles que $R^n = A$. Vous les exprimerez en fonction des ω_k , d'une matrice P que vous avez normalement explicitée à la question 3c et de P^{-1} .
- d. Parmi les racines n -ièmes complexes de la matrice A , combien sont des matrices à coefficients réels ?

Exercice 2

Étude de la somme
d'une série alternée de fonctions

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1) Convergence simple

Déterminer le plus grand intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ sur lequel la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement.

On note alors S la somme sur I de cette série de fonctions.

2) Convergence normale et uniforme

- a. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la norme $\|f_n\|_{\infty}^{[a,b]}$.

- b. La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge-t-elle normalement sur le segment $[a, b]$? sur $\mathbb{R}_+^*$?

- c. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

3) Limite de S en $+\infty$

Montrer que S admet une limite finie en $+\infty$ et déterminer sa valeur.

4) Développement asymptotique au voisinage de $+\infty$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

- a. Les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$ sont-elles absolument convergentes? convergentes?

- b. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $h \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+h}}$.

- c. En déduire l'existence d'une fonction $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ bornée telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{nx}}} = 1 - \frac{1}{2(nx)} + \frac{1}{(nx)^2} \varphi\left(\frac{1}{nx}\right).$$

Indication : Introduire l'application :

$$\varphi_0 : h \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{h^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+h}} - 1 + \frac{1}{2}h \right)$$

et étudier ses limites en 0^+ et en $+\infty$.

- d. Établir alors l'existence de trois constantes réelles α, β et γ telles que, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$S(x) = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{x}} + \frac{\gamma}{x\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right).$$

On exprimera les valeurs de α, β et γ en fonction de constantes réelles simples et des sommes des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$.