

# Suites et séries de fonctions

## Compléments de cours

## II Régularité de la limite d'une suite de fonctions

### II.1 Continuité de la fonction limite

#### Thm • Continuité de la fonction limite

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions définies sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si :

- 1) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$ ,
  - 2) la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $f$ ,
- alors : la fonction limite  $f$  est également continue sur  $I$ .

Démo.  $\Rightarrow$  **Dans un premier temps, nous supposons que la convergence de  $(f_n)_{n \geq 0}$  est uniforme sur la totalité de l'intervalle  $I$ .**  
Fixons  $a \in I$  et montrons la continuité de  $f$  au point  $a$ , c.à.d. que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ .  
Il s'agit de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in I : \left[ |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \right]. \quad (*)$$

Soulignons que dans cette proposition,  $\delta$  peut dépendre de  $\varepsilon$  et de  $a$ , **mais pas de la variable  $x$** .

Commençons par majorer  $|f(x) - f(a)|$  en reliant cet écart à une fonction  $f_n$  quelconque :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I : |f(x) - f(a)| &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(a)) + (f_n(a) - f(a))| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \|f - f_n\|_\infty^I + |f_n(x) - f_n(a)| + \|f_n - f\|_\infty^I \\ &= 2 \|f_n - f\|_\infty^I + |f_n(x) - f_n(a)|. \end{aligned}$$

Démontrons maintenant (\*).

Fixons  $\varepsilon > 0$  quelconque. Puisque la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f$ , il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\|f_{n_0} - f\|_\infty^I \leq \varepsilon/3$ .

Pour ce rang  $n_0$ , la fonction  $f_{n_0}$  est continue au point  $a$ , donc il existe un  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall x \in I : \left[ |x - a| \leq \delta \implies |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leq \varepsilon/3 \right]$$

Remarquons que le choix de  $n_0$  et de  $\delta$  dépendent de  $\varepsilon$  et de  $a$ , **mais pas de la variable  $x$** .

Si l'on prend  $x \in I$  tel que  $|x - a| \leq \delta$ , la majoration ci-dessus donne au rang  $n_0$  :

$$|f(x) - f(a)| \leq 2 \cdot \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

La continuité de  $f$  au point  $a$  est démontrée.

► On affaiblit maintenant l'hypothèse de convergence : on suppose seulement que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .

On fixe  $a \in I$  et on enferme  $a$  dans un segment  $J = [b, c]$  de  $I$  :

- si  $a$  n'est pas une extrémité de  $I$ , on prend  $b, c \in I$  tels que  $b < a < c$  ;
- si  $a$  est l'extrémité gauche de  $I$ , on prend  $b = a$  et  $c \in I$  quelconque ;
- si  $a$  est l'extrémité droite de  $I$ , on prend  $b \in I$  quelconque et  $c = a$ .



Dans tous les cas, le segment  $J = [b, c]$  est inclus dans  $I$  et contient le point  $a$ .

Comme la continuité est une notion locale, il suffit de prouver que la fonction  $f$  restreinte à  $J$  est continue en  $a$ .

Or : la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $J$  vers la fonction  $f$ , et les fonctions  $f_n$  sont toutes continues sur  $J$ .

Le premier point s'applique avec  $J$  dans le rôle de  $I$ , et la continuité de  $f$  au point  $a$  est démontrée.

### II.3 Dérivabilité de la fonction limite

#### Thm • Dérivabilité de la fonction limite

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions définies sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si :

- 1) toutes les fonctions  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,
- 2) la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ ,
- 3) la suite  $(f'_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $g$ ,

Alors :

- 1) la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  ;
- 2)  $\forall x \in I : f'(x) = g(x)$ .

Démo.  $\Rightarrow$  Fixons un point  $a \in I$  quelconque. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . En d'autres termes,  $f_n$  est une primitive sur  $I$  de la fonction  $f'_n$ , qui est continue sur  $I$ . Par le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\forall x \in I : \int_a^x f'_n(t) dt = [f_n(t)]_a^x = f_n(x) - f_n(a).$$

Fixons  $x \in I$  et faisons tendre  $n$  vers l'infini :

- Comme la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$  :

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{et} \quad f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a).$$

- Comme toutes les  $f'_n$  sont continues sur  $I$  et que la suite  $(f'_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $g$  uniformément sur tout segment de  $I$ , le théorème d'interversion limite/intégrale sur un segment donne la continuité de  $g$  sur  $I$  et que :

$$\int_a^x f'_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^x g(t) dt.$$

On obtient ainsi en passant à la limite :

$$\forall x \in I : \int_a^x g(t) dt = f(x) - f(a).$$

Comme  $g$  est continue sur  $I$ , le théorème fondamental de l'analyse montre que  $f$  est une primitive de  $g$  sur  $I$ . La fonction  $f$  est donc dérivable sur  $I$  où elle vérifie  $f' = g$ .  $g$  étant continue sur  $I$ ,  $f$  est en fait de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

#### Thm • Caractère $\mathcal{C}^k$ de la fonction limite

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions définies sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si :

- 1) toutes les fonctions  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  ;
- 2) les suites  $(f_n)_{n \geq 0}$ ,  $(f'_n)_{n \geq 0}$ ,  $(f''_n)_{n \geq 0}$ , ...,  $(f_n^{(k-1)})_{n \geq 0}$  convergent simplement sur  $I$  vers des fonctions  $f = g_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ , ...,  $g_{k-1}$  ;
- 3) la suite  $(f_n^{(k)})_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $g_k$ ,

alors :

- 1)  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  ;
- 2)  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $f^{(k)} = g_k$ .

Démo.  $\hookrightarrow$  **Étape 1 : une conclusion supplémentaire au théorème de dérivation de la limite.**  
Supposons qu'une suite  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  converge simplement sur  $I$  vers  $\varphi$ , et que  $(\varphi'_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $\psi$ . Nous avons vu que  $f$  était aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  et que  $\varphi' = \psi$  (théorème de dérivation de la limite).

Montrons que la convergence de  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  est en fait **uniforme sur tout segment de  $I$** .

Soit  $[a, b] \subset I$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé, comme les fonctions  $\varphi_n$  et  $f$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \quad |\varphi_n(x) - \varphi(x)| &= \left| \left( \varphi_n(a) + \int_a^x \varphi'_n(t) dt \right) - \left( \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(t) dt \right) \right| \\ &= \left| (\varphi_n(a) - \varphi(a)) + \int_a^x (\varphi'_n(t) - \varphi'(t)) dt \right| \\ &\leq |\varphi_n(a) - \varphi(a)| + \left| \int_a^x (\varphi'_n(t) - \varphi'(t)) dt \right| \\ &\leq |\varphi_n(a) - \varphi(a)| + \int_a^x |\varphi'_n(t) - \varphi'(t)| dt. \end{aligned}$$

Or :  $\forall t \in [a, x], \quad |\varphi'_n(t) - \varphi'(t)| \leq \|\varphi'_n - \varphi'\|_{\infty}^{[a, b]}$ ,  
donc par croissance de l'intégrale à bornes croissantes :

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| &\leq |\varphi_n(a) - \varphi(a)| + \int_a^x \|\varphi'_n - \varphi'\|_{\infty}^{[a, b]} dt \\ &= |\varphi_n(a) - \varphi(a)| + \|\varphi'_n - \varphi'\|_{\infty}^{[a, b]} (x - a) \\ &\leq |\varphi_n(a) - \varphi(a)| + \|\varphi'_n - \varphi'\|_{\infty}^{[a, b]} (b - a). \end{aligned}$$

Ce majorant étant indépendant de  $x$ , on en déduit que :

$$\|\varphi_n - f\|_{\infty}^{[a, b]} \leq |\varphi_n(a) - \varphi(a)| + \|\varphi'_n - \varphi'\|_{\infty}^{[a, b]} (b - a).$$

Puisque  $\varphi_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(a)$  et que la suite  $(\varphi'_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $\psi = \varphi'$ , le majorant tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$  ; par théorème d'encadrement, on a montré que  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $\varphi$ .

#### ► Étape 2 : preuve du théorème par récurrence sur $k$ .

Pour chaque  $k \in \mathbb{N}^*$ , notons  $\mathcal{H}(k)$  l'affirmation « le théorème est vrai pour les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  ».

- **Initialisation.** Pour  $k = 1$ ,  $\mathcal{H}(1)$  n'est rien d'autre que le théorème de dérivation de la limite ;  $\mathcal{H}(1)$  a donc déjà été démontrée.
- **Hérédité.** Fixons  $k \in \mathbb{N}^*$  et supposons  $\mathcal{H}(k)$  démontrée. On considère alors  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $I$ , dont les dérivées d'ordre  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$  convergent simplement sur  $I$  vers des fonctions  $g_k$ , et dont les dérivées d'ordre  $(k+1)$  convergent uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $g_{k+1}$ .

Posons  $\varphi_n := f_n^{(k)}$  pour tout  $n \geq 0$ . Les fonctions  $\varphi_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , la suite  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  converge simplement sur  $I$  vers  $\varphi = g_k$  et la suite  $(\varphi'_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $\psi = g_{k+1}$ .

Par le théorème de dérivation de la limite, on obtient que  $g_k \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ , que  $g'_k = g_{k+1}$  et surtout, d'après l'étape 1, que  $(\varphi_n)_{n \geq 0} = (f_n^{(k)})_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .

Les conditions sont réunies pour appliquer  $\mathcal{H}(k)$  à la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  : on en déduit que  $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$  et que  $f^{(j)} = g_j$  pour tout  $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$ .

Enfin,  $f^{(k)} = g_k \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$  donc  $f$  est en fait de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  sur  $I$ , et  $f^{(k+1)} = g'_k = g_{k+1}$ . **L'hypothèse  $\mathcal{H}(k+1)$  est démontrée.**

## III Modes de convergence d'une série de fonctions

### III.2 Convergence uniforme d'une série de fonctions

#### Prop. • Lien entre les convergences

La convergence uniforme d'une série de fonction sur  $I$  implique sa convergence uniforme sur tout segment sur  $I$  ; cette dernière implique sa convergence simple sur  $I$ .

Démo.  $\hookrightarrow$  On note  $(S_n)_{n \geq 0}$  la suite des sommes partielles associée à la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$ .

- Supposons que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur  $I$ .  
Cela signifie que la suite de fonctions  $(S_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $I$ . Par conséquent, la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ , autrement dit : la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .
- De même, si l'on suppose que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ , alors  $(S_n)_{n \geq 0}$  CUSTS de  $I$ , donc  $(S_n)_{n \geq 0}$  converge simplement sur  $I$ , autrement dit  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $I$ .

**Propr.** • Conditions nécessaires pour la convergence uniforme d'une série de fonctions

Soit  $\sum_{n \geq 0} f_n$  une série de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

Si la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur  $I$ , alors :

- 1) les fonctions  $f_n$  sont bornées à partir d'un certain rang et la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $I$  vers la fonction nulle ;
- 2) Pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 0} \in I^{\mathbb{N}}$ , la suite numérique  $(f_n(x_n))_{n \geq 0}$  tend vers 0.

Démo.  $\Leftrightarrow$  Soit  $(S_n)_{n \geq 0}$  la suite des sommes partielles associées à la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$ .

Supposons que la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur  $I$  ; notons  $S$  sa somme.

- 1) Remarquons que :  $\forall n \geq 1, f_n = S_n - S_{n-1}$ .  
Or, puisque  $\sum_{n \geq 0} f_n$  CU sur  $I$ , les fonctions  $S_n$  sont bornées à partir d'un certain rang  $n_0$ .  
Une différence de deux fonctions bornées étant bornée, les fonctions  $f_n$  sont donc bornées sur  $I$  pour tout  $n \geq n_0 + 1$ . De plus, dans l'espace vectoriel  $E = \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$  muni de la norme uniforme sur  $I$  :

$$\begin{cases} S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_{\infty}} S \\ S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_{\infty}} S \end{cases} \quad \text{donc} \quad f_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_{\infty}} S - S = (x \mapsto 0). \quad (\text{par différence de limites})$$

- 2) Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $I$ . Alors :

$$\forall n \geq 0, \quad 0 \leq |f_n(x_n)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x)| = \|f_n\|_{\infty}.$$

Puisque  $\|f_n\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  d'après le point précédent,  
 $f_n(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  par le théorème d'encadrement.

## IV Régularité de la somme d'une série de fonctions

### IV.1 Continuité et limites d'une somme de série de fonctions

**Thm** • Continuité de la somme

Soit  $\sum_{n \geq 0} f_n$  une série de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ . Si :

- 1) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $I$ ,
- 2) la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ ,

alors : la somme  $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$  est continue sur  $I$ .

Démo.  $\Leftrightarrow$  Notons  $(S_n)_{n \geq 0}$  les sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  et  $S$  la somme de la série, définie sur  $I$ .

On applique le théorème de continuité de la limite à la suite de fonctions  $(S_n)_{n \geq 0}$  :

\* Pour tout  $n \geq 0$ , la fonction  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$  est continue sur  $I$  en tant que somme d'un nombre fini de fonctions continues sur  $I$ .

\* Puisque la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  CUSTS de  $I$ , par définition, la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  CUSTS de  $I$  vers  $S$ .

Ceci prouve que la fonction  $S$  est continue sur  $I$ .

### IV.2 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

**Thm** • Intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un segment

Soit  $\sum_{n \geq 0} f_n$  une série de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ ,  $a, b \in I$ . Si :

- 1) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $I$ ,
- 2) la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ , de somme  $S$ .

Alors :

- 1) la fonction  $S$  est continue sur  $I$  ;
- 2) la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right)$  est convergente ;

$$3) \quad \int_a^b S(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx \stackrel{\text{thm}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Démo.  $\Leftrightarrow$  Notons  $(S_n)_{n \geq 0}$  les sommes partielles de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$ ,  $S$  sa somme, définie sur  $I$ .

On applique le théorème d'interversion  $\int_a^b / \lim_{n \rightarrow \infty}$  à la suite de fonctions  $(S_n)_{n \geq 0}$  :

- 1) Toutes les fonctions  $S_n$  sont continues sur  $I$ , en tant que sommes d'un nombre fini de fonctions continues sur  $I$ .
- 2) La suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  CUSTS de  $I$  vers  $S$  car la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  CUSTS de  $I$ .

On en déduit que  $S$  est continue sur  $I$  et que :

$$\begin{aligned} \int_a^b S(x) dx &= \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \right) dx && (\text{définition de } S) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx && (\text{interversion } \int_a^b / \lim_{n \rightarrow \infty}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(x) dx && (\text{définition de } S_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx. && (\text{linéarité de l'intégrale sur un segment}) \end{aligned}$$

On vient de prouver que la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n(x) dx$  est convergente, et que :

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

### IV.3 Dérivation terme à terme d'une série de fonctions

#### Thm • Dérivation terme à terme d'une série de fonctions

Soit  $\sum_{n \geq 0} f_n$  une série de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ . Si :

- 1) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,
- 2) la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $I$ , de somme  $S$ ,
- 3) la série  $\sum_{n \geq 0} f'_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ ,  
alors :

- 1) la somme  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,

$$2) \quad \forall x \in I, \quad S'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

Démo.  $\Leftrightarrow$  Notons  $(S_n)_{n \geq 0}$  les sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$ .  
 $S$  la somme de cette série, définie sur  $I$ .  $n \geq 0$

On applique le **théorème de dérivation de la fonction limite** à la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  des sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  :

- 1) Toutes les fonctions  $S_n := \sum_{k=0}^n f_k$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , en tant que sommes d'un nombre fini de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  ; de plus :

$$\forall x \in I, \quad S'_n(x) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^n f_k(x) \right) = \sum_{k=0}^n f'_k(x). \quad (\text{linéarité de la dérivation})$$

- 2) La suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  CS sur  $I$  vers la fonction  $S$  car la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $I$  ;
- 3) La suite  $(S'_n)_{n \geq 0}$  CUSTS sur  $I$  car la série  $\sum_{n \geq 0} f'_n$  CUSTS sur  $I$ .

On en déduit que : la fonction  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et que :

$$\forall x \in I, \quad S'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n f'_k(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x).$$

**Exercice 25** ► On considère la fonction  $S: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + x}$ .

On pose, pour tout  $n \geq 1$  :  $f_n: x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n^2 + x}$ .

- 1) On applique le théorème de continuité de la somme :

- \* Toutes les fonctions  $f_n$  sont continues sur  $I = \mathbb{R}_+$  (quotient d'une exponentielle par un polynôme ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}_+$ )
- \* Montrons la CN de la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On fixe  $n \geq 1$  :

$$\forall x \geq 0, \quad |f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n^2 + x} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{indépendant de } x,$$

$$\text{donc } 0 \leq \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{n^2}.$$

De plus, la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  est convergente (série Riemann d'exposant  $\alpha = 2 > 1$ ).

Par théorème de comparaison pour les séries numériques,  $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty}^I$  converge,  
donc la série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  CN, donc CU sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Conclusion.** La fonction  $S$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+$  et elle y est continue.

- 2) On va appliquer le théorème de dérivation de la somme sur tout segment de  $J = \mathbb{R}_+^*$  :

\* Pour tout  $n \geq 1$ ,  $f_n \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{K})$  et :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, \quad f'_n(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-nx}}{n^2 + x} \right) \\ &= \frac{-n e^{-nx} \times (n^2 + x^2) - e^{-nx} \times 1}{(n^2 + x^2)^2} \\ &= -e^{-nx} \frac{nx + n^3 + 1}{(n^2 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

\* La série  $\sum_{n \geq 1} f_n$  CN sur  $I$  d'après la question précédente, donc elle CS sur  $J$ .

\* Montrons que  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  CNSTS de  $J$ .

Soit  $[a, b] \subset J = ]0, +\infty[$ , de sorte que  $0 < a < b$ .

Pour  $n \geq 1$  fixé, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \quad |f'_n(x)| &= e^{-nx} \frac{nx + n^3 + 1}{(n^2 + x)^2} \\ &\leq e^{-na} \frac{nb + n^3 + 1}{n^4} \quad \text{indépendant de } x, \\ \text{donc } 0 \leq \|f'_n\|_{\infty}^{[a,b]} &\leq e^{-na} \frac{nb + n^3 + 1}{n^4}. \end{aligned}$$

Posons  $v_n := e^{-na} \frac{nb + n^3 + 1}{n^4}$  et montrons que  $\sum_{n \geq 1} v_n$  converge :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{v_n}{e^{-na}} = \frac{nb + n^3 + 1}{n^4} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{b}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{d'où } v_n = o(e^{-na}).$$

De plus,  $e^{-na} \geq 0$  pour tout  $n \geq 1$  et la série géométrique  $\sum_{n \geq 1} e^{-na}$  converge car  $a > 0$ , donc la série  $\sum_{n \geq 1} v_n$  converge bien.

Par un deuxième théorème de comparaison,  $\sum_{n \geq 1} \|f'_n\|_{\infty}^I$  converge aussi.

Par conséquent, la série  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  CNSTS de  $J$ , donc CUSTS.

**Conclusion.** On a ainsi démontré que la somme  $S$  de  $\sum_{n \geq 1} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J = ]0, +\infty[$ , et qu'on peut dériver terme à terme :

$$\forall x > 0, \quad S'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + x} \right) \\ \stackrel{\text{thm}}{=} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \frac{nx + n^3 + 1}{(n^2 + x)^2}.$$

- 3) Montrons que  $S'$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  par la *définition* de la croissance. Prenons  $x, y$  deux réels tels que  $0 < x \leq y$ , et prouvons que :

$$S'(x) \leq S'(y) \quad \text{c.à.d.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(y).$$

- Fixons  $n \geq 1$  et montrons que  $f'_n$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Comme  $f_n$  est 2 fois dérivable, il suffit de prouver que  $f''_n \geq 0$  sur  $I$ . Par la formule de dérivation de Leibniz :

$$\forall x > 0 : \quad f''_n(x) \\ = \frac{d^2}{dx^2} \left( e^{-nx} \times \frac{1}{n^2 + x} \right) \\ = \frac{d^2}{dx^2} (e^{-nx}) \times \frac{1}{n^2 + x} + 2 \frac{d}{dx} (e^{-nx}) \times \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{n^2 + x} \right) \\ + e^{-nx} \times \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{n^2 + x} \right) \\ = n^2 e^{-nx} \times \frac{1}{n^2 + x} - 2n e^{-nx} \times \frac{1}{(n^2 + x)^2} + e^{-nx} \times \frac{2}{(n^2 + x)^3} \\ = e^{-nx} \left( \frac{n^2}{n^2 + x} + \frac{2n}{(n^2 + x)^2} + \frac{2}{(n^2 + x)^3} \right) \geq 0.$$

**La fonction  $f'_n$  est bien croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .**

- Fixons  $x < y$  deux éléments de  $\mathbb{R}_+^*$ . D'après le point précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad f'_n(x) \leq f'_n(y).$$

Comme les séries  $\sum_{n \geq 0} f'_n(x)$  et  $\sum_{n \geq 0} f'_n(y)$  sont convergentes, par croissance de la sommation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(y) \quad \text{autrement dit :} \quad S'(x) \leq S'(y).$$

**Conclusion.** La fonction  $S'$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ .

- 4) ■ Puisque la fonction  $S'$  est croissante sur  $]0, +\infty[$ , par le théorème de limite monotone, elle admet une limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  en  $0^+$ . Soit  $x > 0$  ; comme  $S'(x)$  est somme d'une série à termes négatifs, elle est inférieure à ses sommes partielles. Pour tout  $x > 0$  et tout entier  $N \geq 1$  :

$$S'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \frac{nx + n^3 + 1}{(n^2 + x)^2} \leq - \sum_{n=1}^N e^{-nx} \frac{nx + n^3 + 1}{(n^2 + x)^2}. \quad (*)$$

Observons ce qui se passe quand  $x \rightarrow 0^+$  :

$$* \quad S'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell ;$$

$$* \quad - \sum_{n=1}^N e^{-nx} \frac{nx + n^3 + 1}{(n^2 + x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} - \sum_{n=1}^N \frac{n^3 + 1}{n^4} \quad (\text{somme d'un nombre fini de limites}).$$

On peut maintenant passer à la limite dans les inégalités (\*) :

$$\forall N \geq 1, \quad \ell \leq - \sum_{n=1}^N \frac{n^3 + 1}{n^4} \leq - \sum_{n=1}^N \frac{n^3}{n^4} = - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}. \quad (**)$$

L'opposé de la série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  est divergente (par un théorème de comparaison) et que ses sommes partielles tendent vers  $-\infty$ . Quand  $N \rightarrow \infty$ , par passage à la limite dans (\*\*), on obtient  $\ell \leq -\infty$ , et donc  $\ell = -\infty$ .

**Conclusion.**  $S'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ .

- Appliquons maintenant le **théorème de la limite de la dérivée** à la fonction  $S$  sur  $]0, +\infty[$  :

- $S$  est continue sur  $[0, +\infty[$  ;
- $S$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  ;
- $S'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ .

On en déduit que la limite du taux d'accroissement de  $S$  en 0 vaut également  $-\infty$  :

$$\frac{S(x) - S(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty.$$

Cela montre que la fonction  $S$  n'est pas dérivable en 0, et que sa courbe présente en ce point une demi-tangente verticale.

#### Thm • Caractère $\mathcal{C}^k$ d'une somme de série de fonctions

Soit  $\sum_{n \geq 0} f_n$  une série de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Si :

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ ,
- les séries  $\sum_{n \geq 0} f_n, \sum_{n \geq 0} f'_n, \dots, \sum_{n \geq 0} f_n^{(k-1)}$  convergent simplement sur  $I$ ,
- la série  $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ ,

alors : la somme  $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ , et

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in I : \quad S^{(j)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^j}{dx^j} \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}(x).$$

Démo.  $\Leftrightarrow$  On applique le théorème de dérivation de la limite à l'ordre  $k$  à la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  des sommes partielles de la série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  :

- \* Les fonctions  $S_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  en tant que sommes d'un **nombre fini** de fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$  ;
- \* Pour chaque  $k \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , les suites  $(S_n^{(k)})_{n \geq 0}$  convergent simplement sur  $I$ , respectivement vers les sommes  $g_k$  des séries  $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$  ;
- \* La suite  $(S_n^{(k)})$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers la somme  $g_k$  de la série  $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ .

On en déduit que  $g_0 := \sum_{n=0}^{\infty} f_n = S$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ , et que :

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket : \quad S^{(j)} = g_j = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(j)}.$$