Devoir à la maison n° 5

Faculatif

à rendre le vendredi 7 novembre 2025

En cas de problème, une seule adresse : marc.tuloup@lyceehugobesancon.org !

Premier problème

De nombreux circuits électroniques sont alimentés avec une tension continue de 5 V. Une " alimentation à découpage " transforme, en plusieurs étapes, la tension alternative sinusoïdale du réseau électrique en une tension continue. La dernière étape consiste à filtrer une tension rectangulaire représentée *figure 1* par le filtre passif
" L, C " de la *figure 2* dans lequel la résistance R symbolise l'ensemble des circuits que l'on souhaite alimenter sous une tension presque parfaitement continue. On se propose dans ce problème de comparer deux méthodes de calcul pour évaluer les performances du filtre.

Analyse harmonique

On établit à l'entrée du filtre de la *figure 2* une tension sinusoïdale $v_1(t)$ de pulsion ω. On adopte la notation complexe.

On notera: $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ et $Q_0 = \dfrac{L\omega_0}{R}$

1. Déterminer la fonction de transfert complexe de ce montage: $\underline{H} = \dfrac{\underline{v_2}}{\underline{v_1}}$

2. Étude en échelle linéaire de la fonction de transfert.

a. Quelle inégalité doit vérifier Q_0 pour que la courbe représentative de $|\underline{H}|$ en fonction de la pulsation ω présente un extremum ?

b. Ouelle est alors, en fonction de ω_0 et Q_0, la pulsation ω_1 de l'extremum H_{max}. et la valeur de H_{max} ?

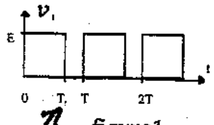
c Représenter les deux allures possibles (suivant la valeur de Q_0) de la courbe représentative $|\underline{H}|$ en fonction de la pulsation ω en faisant clairement apparaître les points de pulsations remarquables ($\omega = 0$ et $\omega = \omega_0$) Tracer l'allure de Arg ($\underline{H}$) en fonction de la pulsation ω .

3. Étude en échelle semi-logarithmique.

a. Rechercher les équations des directions asymptotiques de la courbe

$$20.\log|\underline{H}| = f(\log\omega).$$

b. Tracer les directions asymptotiques et représenter les deux allures possibles des courbes réelles par rapport à ces directions asymptotiques.



Tf

figure1

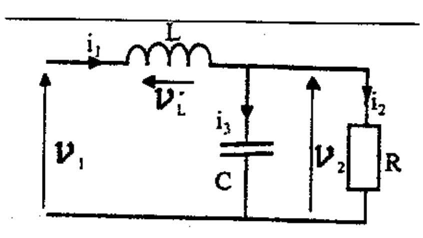


figure 2

4. On applique au filtre le signal rectangulaire $v_1(t)$ représenté à la *figure 1*. On appelle $\alpha = T_f/T$ le rapport cyclique variable ($0 < \alpha < 1$) de la tension $v_1(t)$.

Calculer la valeur moyenne V_{moy} de v_1 (t) et, à l'aide des relations rappelées en annexe, les amplitudes V_f du fondamental et V_h du premier harmonique non nul de v_1 (t) . Exprimer, en fonction de la période T, les pulsations ω_f du fondamental et ω_h du premier harmonique.

5. On admet que le signal rectangulaire v_1 (t) est correctement représenté par la superposition de sa composante continue V_{moy} et de son terme fondamental d'amplitude V_f .

a. Calculer la valeur moyenne V_{20} du signal v_2(t) à la sortie du filtre.

b. Exprimer l'amplitude V_{2f} de la composante alternative de v_2(t) en sortie du filtre en fonction de α, E, Q_0 , ω_0 et T. En déduire l'ondulation crête à crête ΔV_2.

6. Application numérique.

Le signal rectangulaire a une fréquence f = 1/ T = 10 kHz et une amplitude E = 10 V.
On souhaite obtenir en sortie V_{20} = 5 V pour I_2. = 10 A. Les circuits électroniques alimentés fonctionnent correctement si ΔV_2 n'excède pas 100mV.

a. Calculer α et R.

b. On choisit L = 125 μH. Quelle valeur faut-il donner au condensateur C pour que la condition $\Delta V_2 \leq$ 100mV soit respectée avec l'hypothèse du 5° ?

c. Vérifier que le premier harmonique non nul de v_1(t) engendre en sortie du filtre une ondulation résiduelle de pulsation ω_h négligeable en calculant littéralement puis numériquement l'amplitude crête à crête de cette ondulation.

II Étude des régimes transitoires successifs

Le filtre de la figure 2 est alimenté par la tension rectangulaire périodique de fréquence t = 1/T représentée à la figure 1. On appelle $\alpha = T_f /T$ le rapport cyclique variable (0 < a < 1) de la tension v_1(t).

En régime permanent, toutes les tensions et tous les courants présents dans le circuit sont périodiques de période T. Dans un premier temps (questions 1. et 2.), on suppose le filtrage suffisamment efficace pour que la tension de sortie v_2(t) puisse être considérée comme parfaitement continue:

$$v_2(t) = V_{20},$$

1. Calcul des grandeurs moyennes.

a. Calculer la valeur moyenne V_L de v_L (t) et la valeur moyenne I_3 de i_3 (t).
b. Établir la relation liant E, V_{20} et α.
c. Calculer la valeur moyenne I_1 de i_1 (t) en fonction de E , R et α.

2.. Recherche de i_1 (t) .

a. Pour 0 < t < αT, écrire l'équation différentielle vérifiée par i_1 (t) et résoudre cette équation différentielle sachant que, à t = 0, $i_1(0) = I_m$

b. Pour aT < t < T, écrire l'équation différentielle vérifiée par i_1(t) et résoudre cette équation différentielle sachant que, à t = α T, $i_1(\alpha T) = I_M$

c. Calculer l'ondulation ΔI du courant i_1 (t): $\Delta I = I_M - I_m$ (on exprimera ΔI en fonction de E, L, T et α).

d. Dessiner, sur le même repère de temps, les allures des courants i_1 (t) et i_3(t) en faisant clairement apparaitre les points remarquables (dates des extrémums, des passages à zéro, etc.).

3. Ondulation de tension aux bornes du condensateur C

D'après l'allure du courant i_3 (t) dans le condensateur, on doit revenir sur 1'hypothèse $v_2(t) = V_{20}$,
En fait, $v_2(t)$ est la somme d'une composante continue V_{20} et d'une composante alternative $v_{2\,alt}(t)$ que l'on va étudier.

a. Expliquer, sans effectuer de calcul, quelle est l'allure mathématique de $v_{2\,alt}(t)$. Tracer, en concordance de temps avec i_3 (t), 1'allure de $v_2(t)$ en faisant clairement apparaître les points remarquables.

b. Pour calculer l'ondulation crête à crête ΔV_2 de $v_2(t)$), on propose la méthode suivante:
intégrer la relation différentielle qui lie i_3 *(t)* à v_2(t) entre les instants α.T/2 et $(1 + \alpha)$ T/2.
En déduire l'ondulation ΔV_2 en fonction de ΔI, T et C puis en fonction de α, E, T, L et C.

c. Pour quelle valeur de α l'ondulation est-elle maximale ?

4. Application numérique. Pour la tension rectangulaire, on a: E = 10 V et f = 1 /T = 10 kHz. On souhaite obtenir en sortie V_{20} = 5V pour I_2 = 1O A. Les circuits électroniques alimentés fonctionnent correctement si ΔV_2 n'excède pas 100 mV.

a. Quelle valeur faut-il donner à L pour que ΔI = 2 A ?

b. Quelle sera alors la valeur à donner au condensateur C pour que la condition $\Delta V_2 \leq$ 100 mV soit respectée ?

Comparer aux résultats de la première méthode.

ANNEXE

Développement en série de Fourier

$$\mathbf{f(t) = A_0 + \Sigma(A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) = A_0 + \Sigma(C_n \cos(n\omega t - \Phi_n)}$$

$$\mathbf{A_n = \left(\frac{2}{T}\right)\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt} \qquad \mathbf{B_n = \left(\frac{2}{T}\right)\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt}$$

$$\mathbf{C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}}$$

Exercice : Conversion d'énergie. Se rapprochant d'une résolution de problème par certaines questions

On cherche à convertir de l'énergie électrique continue en énergie alternative. Pour cela on utilise un dispositif appelée onduleur.

1. Peut-on réaliser un onduleur à l'aide de composants linéaires ?

   Pour effectuer cette conversion, on dispose d'une source de tension continue de f.é.m. constante positive E, et on souhaite alimenter une charge, représentée ici par un dipôle $r - L$ série, de façon alternative, et on souhaite que le courant délivré dans ce dipôle soit le plus proche possible d'un courant sinusoïdal. On propose le montage ci-après (figure 1), composé de quatre interrupteurs idéaux K_1 à K_4.

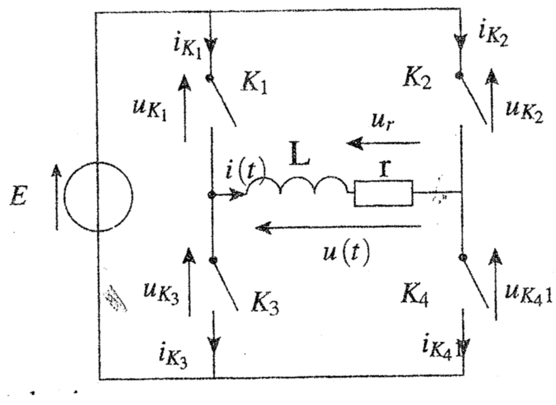


FIGURE 1 –

Dans un premier temps on cherche à obtenir une tension $u(t)$ aux bornes de la charge en forme de créneau à paliers nuls représenté sur la figure suivante (figure 2) :

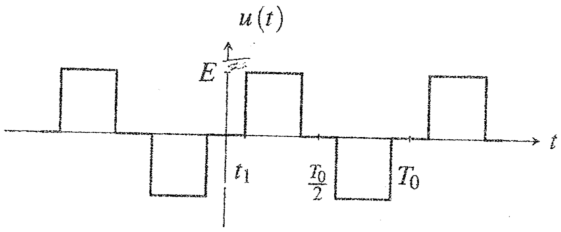


FIGURE 2 –

2. Proposer une séquences d'états (ouvert ou fermé) des quatre interrupteurs sur les intervalles de temps $[-t_1, t_1[$, $[t_1, T_0/2-t_1[$, $[T_0/2-t_1, T_0/2+t_1[$ et $[T_0/2+t_1, T_0-t_1[$ permettant d'obtenir la tension $u(t)$ voulue. On présentera les résultats de manière synthétique dans un tableau dont les colonnes correspondent aux quatre interrupteurs, et les lignes aux quatre intervalles de temps. On codera par **O** l'état ouvert et par **F** l'état fermé d'un interrupteur.

   On donne les coefficients de la série de Fourier du créneau précédent, en posant $\alpha = 2\pi \frac{t_1}{T_0}$:

$$a_k = 0, k \in \mathbb{N}, b_{2p} = 0, p \in \mathbb{N}, b_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1)\pi} \cos\left((2p+1)\alpha\right), p \in \mathbb{N}.$$

3. Justifier sans calcul la nullité de certains coefficients. Commenter les valeurs de ces coefficients, au regard de la tension $u(t)$ désirée.
4. Proposer une valeur de t_1 qui permette de se rapprocher au mieux d'une sinusoïde. On justifiera numériquement ce choix.

   Pour la suite on considère que cette valeur de t_1 est réalisée.
5. Donner l'expression de la tension u_r aux bornes de r. On se limitera aux deux premiers harmoniques non nuls. Discuter du choix de la valeur de L. Application numérique pour une fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0} = 100\,\mathrm{Hz}$ et une charge $r = 20\,\Omega$.
6. Tracer sur un même graphe $u(t)$ et $u_r(t)$ calculé avec les deux premiers harmoniques non nuls.