

Corrigé du devoir maison n° 2

Exercice 1

Racines n -ièmes complexes d'une matrice non diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.

1) a. Puisque 1 est racine évidente de P :

$$\begin{aligned} P &= X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X - 1)(X^2 - 3X + 2) \\ &= (X - 1)(X - 1)(X - 2) = (X - 1)^2(X - 2). \end{aligned}$$

b. Calculons $P(A)$:

$$\begin{aligned} P(A) &= (A - I_3)^2 \times (A - 2I_3) \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion : P est un polynôme annulateur de A .

Soit $F = \text{Ker}(A - 2I_3)$ et $G = \text{Ker}((A - I_3)^2)$.

2) a. • On a : $\text{rg}(A - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -5 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 2$
car $C_1 = C_3$, et les deux colonnes restantes sont non colinéaires.

• La matrice $(A - I_3)^2$ a été calculée dans la question précédente, et :

$$\text{rg}((A - I_3)^2) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

car $L_2 = 0_{1,3}$, $L_3 = -L_1$, et la ligne restante est non nulle.

Conclusion : $\text{rg}(A - 2I_3) = 2$ et $\text{rg}((A - I_3)^2) = 1$

b. • Le théorème du rang matriciel donne, pour toute matrice M :

$$n_{\text{col}}(M) = \dim(\text{Ker}(M)) + \text{rg}(M).$$

Appliqué aux matrices $A - 2I_3$ et $(A - I_3)^2$, on obtient :

$$\dim(F) = \dim \text{Ker}(A - 2I_3) = 3 - \text{rg}(A - 2I_3) = 3 - 2 = 1$$

$$\text{et } \dim(G) = \dim \text{Ker}((A - I_3)^2) = 3 - \text{rg}((A - I_3)^2) = 3 - 1 = 2.$$

• Pour trouver une base de F , il suffit donc de trouver un vecteur non nul de $F = \text{Ker}(A - 2I_3)$. Or :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ vérifie } C_1 = C_3, \text{ d'où } C_1 - C_3 = 0_{3,1}.$$

On en tire : $V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I_3) = F$ et (V_1) est une base de F .

• Pour trouver une base de G , il suffit de trouver 2 vecteurs non colinéaires de $G = \text{Ker}((A - I_3)^2)$. Or :

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ vérifie : } \begin{cases} C_1 + 2C_2 = 0_{3,1} \\ 3C_2 + C_3 = 0_{3,1}. \end{cases}$$

En posant $V_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $V_2, V_3 \in G$ et les vecteurs V_2, V_3 ne sont pas colinéaires : (V_2, V_3) est une base de G .

c. Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^3$.

Par le théorème de juxtaposition de bases, il suffit de montrer que la famille $\mathcal{F} := (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$:

• $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{C}^3)$;

$$\bullet \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

$\mathcal{F}$ est bien une base de $\mathbb{C}^3$,
donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^3$: $F \oplus G = \mathbb{C}^3$.

Soit u : $V \in \mathbb{C}^3 \mapsto AV \in \mathbb{C}^3$.

3) a. u est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice A ,
donc sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est A .

b. Cherchons une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$ où $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

► **Analyse.** Supposons une telle base $\mathcal{B}$ construite.

En lisant les colonnes de la matrice de u , on obtient les équations :

$$\begin{cases} u(e_1) = 2e_1 \\ u(e_2) = e_2 \\ u(e_3) = e_3 + e_2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} (A - 2I_3)e_1 = 0_{3,1} \\ (A - I_3)e_2 = 0_{3,1} \\ (A - I_3)e_3 = e_2 \neq 0_{3,1}. \end{cases}$$

Nous retiendrons :

- e_1 est dans $\text{Ker}(A - 2I_3) = F$.
- e_2 se déduit de e_3 par la relation $e_2 = (A - I_3)e_3$.
- e_3 n'est pas dans $\text{Ker}(A - I_3)$,
mais il est dans $\text{Ker}((A - I_3)^2) = G$.
En effet : $(A - I_3)^2 e_3 = (A - I_3)e_2 = 0_{3,1}$.

► **Synthèse**

- Prenons $e_1 := V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, de sorte que $e_1 \in F$.
Regardons si le vecteur V_2 de G est dans $\text{Ker}(A - I_3)$:

$$(A - I_3)V_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1} \quad : \text{ce n'est pas le cas.}$$

Nous prendrons donc : $e_3 := V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 := (A - I_3)V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- La famille $\mathcal{B}' := (e_1, e_2, e_3)$ est bien une base de $\mathbb{C}^3$ car elle comporte 3 vecteurs et :

$$\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

- Calculons les images des e_j par u , c'est-à-dire les vecteurs Ae_j :

* $e_1 \in F$ donc $(A - 2I_3)e_1 = 0_{3,1}$ d'où $Ae_1 = 2e_1$;

* $Ae_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_2$;

* $e_2 = (A - I_3)e_3$ donc $Ae_3 = e_2 + e_3$.

$$\text{Finalement :} \quad \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

Conclusion : Si l'on pose : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

alors $\mathcal{B}' := (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = T$.

c. Écrivons la formule de changement de base, de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, pour l'endomorphisme u . La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et on a :} \quad \underbrace{A}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} = \underbrace{P}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \underbrace{T}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}'} P^{-1}.$$

Les matrices A et T sont donc semblables dans $\mathbb{C}$, mais aussi dans $\mathbb{R}$ car toutes les matrices de cette formule sont à coefficients réels.

4) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, $M = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$. On suppose que $M^n = T$.

a. Puisque $T = \text{mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, $\varphi^n = u$.

Alors : $u \circ \varphi = \varphi^n \circ \varphi = \varphi^{n+1} = \varphi^n \circ \varphi = u \circ \varphi$.

Conclusion : Les endomorphismes u et φ commutent.

b. • Rappelons que $F = \text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Ker}(u - 2\text{id}_{\mathbb{C}^3})$
et que $G = \text{Ker}((A - I_3)^2) = \text{Ker}((u - \text{id}_{\mathbb{C}^3})^2)$.

Puisque φ commute avec u , φ commute également avec $u - 2\text{id}_{\mathbb{C}^3}$ et $(u - \text{id}_{\mathbb{C}^3})^2$. Pour cette raison, F et G sont stables par φ .

• Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^3$ et sont stables par φ . Dans la base $\mathcal{B}'$, qui est adaptée à $F \oplus G$, la matrice de φ est donc diagonale par blocs, de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & Y \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ et Y est la matrice de l'endomorphisme φ_G induit par φ sur G dans la base $\mathcal{B}_G = (e_2, e_3)$.

c. • Puisque $u \circ \varphi = \varphi \circ u$, en prenant les matrices dans la base $\mathcal{B}'$, on obtient $TM = MT$. En notant $U := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en calculant par blocs :

$$\begin{pmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \cdot \\ \cdot & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \cdot \\ \cdot & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \cdot \\ \cdot & U \end{pmatrix}$$

$$\text{donc} \quad \begin{pmatrix} 2\alpha & \cdot \\ \cdot & UY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & \cdot \\ \cdot & YU \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad UY = YU.$$

La matrice Y commute donc avec $U := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Écrivons $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $UY = YU$ donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
d'où $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$,
 $a+c = a$ et $b+d = a+b$,
puis $c = 0$ et $a = d$.

La matrice Y est donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{C}$.

d. Soit $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $Y = aI_2 + bN$.

Remarquons que $N^2 = 0_2$, d'où $N^k = 0_2$ pour tout entier $k \geq 2$.

De plus, I_2 et N commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour calculer Y^n (rappelons que, dans tout l'exercice, $n \geq 2$) :

$$\begin{aligned} Y^n &= (aI_2 + bN)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k} \times (bN)^k \\ &= \underbrace{a^n I_2}_{k=0} + \underbrace{na^{n-1}bN}_{k=1} + \underbrace{0_2 + \dots + 0_2}_{N^k = 0_2 \text{ car } k \geq 2} \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice quelconque.

a. • Les racines n^e de l'unité sont les nombres complexes :

$$\omega_k := e^{i2k\pi/n} \text{ pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

• Les racines n^e complexes du nombre 2 sont les nombres :

$$2^{1/n} e^{i2k\pi/n} = 2^{1/n} \omega_k \text{ pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

En effet, pour $z \in \mathbb{C}^*$ quelconque que l'on écrit sous forme exponentielle $z = r e^{i\theta}$ (où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), on a :

$$\begin{aligned} z^n = 2 &\iff r^n e^{in\theta} = 2e^{i0} \\ &\iff \begin{cases} r^n = 2 = (2^{1/n})^n \\ n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 2^{1/n} \text{ (car } x \mapsto x^n \text{ est bijective sur }]0, +\infty[) \\ \theta \equiv 0 \pmod{2\pi/n} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 2^{1/n} \\ \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / \theta \equiv \frac{2k\pi}{n} \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / z = 2^{1/n} e^{i2k\pi/n}. \end{aligned}$$

b. Résolvons l'équation matricielle $M^n = T$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, par analyse-synthèse.

• **Analyse** : supposons que $M^n = T$.

Les résultats de la question 4 s'appliquent.

D'après les questions 4b et 4c, la matrice M s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & Y \end{pmatrix} \text{ pour } Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha, a, b \in \mathbb{C}.$$

Comme $M^n = T$, en calculant par bloc :

$$\begin{pmatrix} \alpha^n & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & U \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} \alpha^n = 2 \\ Y^n = U. \end{cases}$$

Ainsi α est une racine n^e de 2, et d'après la question 4d :

$$\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en tire que a est une racine n^e de l'unité, et que b se déduit de n et a par la relation $b = \frac{1}{na^{n-1}}$. En conclusion, nécessairement :

$$\exists (k, \ell) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2 / M = \begin{pmatrix} 2^{1/n} \omega_k & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\ell & \frac{1}{n} \omega_\ell^{-(n-1)} \\ 0 & 0 & \omega_\ell \end{pmatrix}.$$

• **Synthèse** : si l'on considère une matrice M de la forme ci-dessus, c'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} 2^{1/n} \omega_k & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & \omega_\ell I_2 + \frac{1}{n} \omega_\ell^{-(n-1)} J \end{pmatrix},$$

on peut calculer M^n par blocs :

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} (2^{1/n} \omega_k)^n & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & (\omega_\ell I_2 + \frac{1}{n} \omega_\ell^{-(n-1)} J)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \omega_k^n & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & \omega_\ell^n I_2 + n \omega_{(n-1)\ell} \times \frac{1}{n} \omega_\ell^{-(n-1)} J \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & I_2 + J \end{pmatrix} \\ &= T. \end{aligned}$$

Conclusion : Les racines n^e de la matrice T sont les matrices

$$M_{k,\ell} := \begin{pmatrix} 2^{1/n} \omega_k & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\ell & \frac{1}{n} \omega_\ell^{-(n-1)} \\ 0 & 0 & \omega_\ell \end{pmatrix} \text{ pour } (k, \ell) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2.$$

Elles sont toutes distinctes car le couple formé par les deux premiers coefficients diagonaux est différent pour chaque valeur du couple (k, ℓ) .

La matrice T admet donc exactement n^2 racines n^e distinctes.

c. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ quelconque. On reprend la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ de la question 3c, pour laquelle $A = P T P^{-1}$, et on pose $M := P^{-1} R P$, de sorte que :

$$\begin{aligned} R^n = A &\iff (P M P^{-1})^n = P T P^{-1} \\ &\iff P M^n P^{-1} = P T P^{-1} \\ &\iff M^n = T \\ &\iff \exists (k, \ell) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2 / M = M_{k,\ell} \\ &\iff \exists (k, \ell) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2 / R = P M_{k,\ell} P^{-1}. \end{aligned}$$

Conclusion : Les racines n^e de la matrice A sont donc les matrices :

$$R_{k,\ell} := P \begin{pmatrix} 2^{1/n} \omega_k & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\ell & \frac{1}{n} \omega_\ell^{-(n-1)} \\ 0 & 0 & \omega_\ell \end{pmatrix} P^{-1} \text{ pour } (k, \ell) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2.$$

d. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$ quelconque. Soulignons que la matrice P est à coefficients réels, et remarquons que les racines n^e de l'unité s'écrivent ω^k pour $\omega = \exp(i 2\pi/n)$. On a :

$$\begin{aligned} R_{k,\ell} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) &\iff \overline{R_{k,\ell}} = R_{k,\ell} \iff \overline{P M_{k,\ell} P^{-1}} = P M_{k,\ell} P^{-1} \\ &\iff P \overline{M_{k,\ell}} P^{-1} = P M_{k,\ell} P^{-1} \iff \overline{M_{k,\ell}} = M_{k,\ell} \\ &\iff \begin{cases} 2^{1/n} \overline{\omega^k} = 2^{1/n} \omega^k \\ \overline{\omega^\ell} = \omega^\ell \\ \frac{1}{n} \overline{\omega^{-(n-1)\ell}} = \frac{1}{n} \omega^{-(n-1)\ell} \end{cases} \\ &\iff \omega^{-k} = \omega^k, \quad \omega^{-\ell} = \omega^\ell, \quad \omega^{(n-1)\ell} = \omega^{-(n-1)\ell} \\ &\iff \omega^{2k} = 1, \quad \omega^{2\ell} = 1, \quad \omega^{2(n-1)\ell} = 1. \end{aligned}$$

Or : $\omega^j = 1$ si et seulement si j est un multiple de n ; si $2k$ et 2ℓ sont des multiples de n , c'est automatiquement le cas pour $2(n-1)\ell$ aussi.

Puisque $2k$ est dans $\llbracket 0, 2n-2 \rrbracket$, c'est un multiple de n si et seulement si $k = 0$ ou $k = n/2$ (ce dernier cas ne se produit que si n est pair, et dans ce cas $\omega^k = -1$) ; même chose pour ℓ .

Conclusion : Si n est impair, la matrice A admet une seule racine n^e à coefficients réels :

$$R_{0,0} = P \begin{pmatrix} 2^{1/n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Si n est pair, la matrice A admet 4 racines n^e à coefficients réels :

$$\begin{aligned} R_{0,0} &= P \begin{pmatrix} 2^{1/n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, & R_{0,n/2} &= P \begin{pmatrix} 2^{1/n} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}, \\ R_{n/2,0} &= P \begin{pmatrix} -2^{1/n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, & R_{n/2,n/2} &= P \begin{pmatrix} -2^{1/n} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

d'après E3A PSI 2020

Exercice 2

Étude de la somme d'une série alternée de fonctions

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie par :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}. \end{aligned}$$

1) Convergence simple

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.

• 1^{er} cas : si $x > 0$.

* La suite $(f_n(x))_{n \geq 0} = ((-1)^n / \sqrt{1+nx})_{n \geq 0}$ est alternée car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1/\sqrt{1+nx} \geq 0$;

* La suite $(1/\sqrt{1+nx})_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0.

Par le critère spécial des séries alternées (CSSA), la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est convergente.

• 2^e cas : si $x = 0$.

La suite $(f_n(0))_{n \geq 0} = ((-1)^n)_{n \geq 0}$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n(0)$ diverge grossièrement.

Conclusion : La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur l'intervalle $I :=]0, +\infty[$.

On note alors S la somme sur I de cette série de fonctions.

2) Convergence normale et uniforme

a. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Fixons $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [a, b], |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+nx}}, \text{ mais } 1+nx \geq 1+na > 0$$

donc en appliquant $t \mapsto 1/\sqrt{t}$, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall x \in [a, b], |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+na}}.$$

Comme, de plus, il y a égalité pour $x = a \in [a, b]$, on en déduit :

$$\|f_n\|_{\infty}^{[a,b]} = \frac{1}{\sqrt{1+na}}.$$

(On aurait également pu procéder par étude de fonction.)

b. • La série $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}^{[a,b]} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{1+na}}$ est divergente car :

$$* \frac{1}{\sqrt{1+na}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{na}};$$

$$* \forall n \geq 1, \frac{1}{\sqrt{na}} \geq 0;$$

* La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{na}}$ est divergente (multiple de série de Riemann d'exposant $\alpha = 1/2 \leq 1$).

La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge donc pas normalement sur $[a, b]$.

• Puisque $\mathbb{R}_+^* \supset [a, b]$, $\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+^*} \geq \|f_n\|_{\infty}^{[a,b]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La série $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+^*}$ est donc également divergente : la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ ne converge donc pas non plus normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Notons $(R_n)_{n \geq 0}$ la suite de ses restes sur cet intervalle.

Pour prouver la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, on montre que ses restes convergent uniformément sur ces segments vers la fonction nulle. Fixons un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et un entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [a, b], |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{1+kx}} \right|$$

$$\leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+(n+1)x}} \right| \quad (\text{par le CSSA})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)a}}, \text{ indépendant de } x, \text{ donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|R_n\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)a}}.$$

Puisque $a > 0$, $\frac{1}{\sqrt{1+(n+1)a}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc par le théorème d'encadrement, la suite $(R_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction nulle.

Conclusion : Cela prouve que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

3) Limite de S en $+\infty$

Appliquons le théorème de sommation de limites à la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ au voisinage de $+\infty$:

* Fixons $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x > 0, f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \quad (\text{limites finies})$$

* On a vu que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ convergeait uniformément sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, ce qui n'est pas suffisant pour appliquer ce théorème. Toutefois, la preuve faite dans la question 2c ne fait pas intervenir la borne b du segment : on montre de la même manière que $\|R_n\|_{\infty}^{[1, \infty[} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, et donc que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $J := [1, +\infty[$.

Le théorème s'applique sur l'intervalle J et on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

4) Développement asymptotique au voisinage de $+\infty$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

a. Puisque : $\sum_{n \geq 1} |u_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n \geq 1} |v_n| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$, séries de Riemann respectivement divergente et convergente, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente, mais $\sum_{n \geq 1} v_n$ l'est (et elle est donc convergente). Enfin, $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente par le CSSA.

Conclusion : $\sum_{n \geq 1} u_n$ est semi-convergente, tandis que $\sum_{n \geq 1} v_n$ est absolument convergente.

b. On a :
$$\frac{1}{\sqrt{1+h}} = (1+h)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)}{2} h^2 + o(h^2)_{h \rightarrow 0}$$
$$= 1 - \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2 + o(h^2)_{h \rightarrow 0}.$$

c. D'après le développement limité qui précède, il existe une fonction $\varepsilon : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall h \geq 0, \quad \frac{1}{\sqrt{1+h}} = 1 - \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2 + h^2 \varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Posons : $\forall h > 0, \quad \varphi_0(h) = \frac{1}{h^2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{1+h}} - 1 + \frac{1}{2}h \right).$

de sorte que :

$$\forall h > 0, \quad \frac{1}{\sqrt{1+h}} = 1 - \frac{1}{2}h + h^2 \varphi_0(h). \quad (*)$$

La fonction φ_0 est continue sur $]0, +\infty[$, et :

$$\forall h > 0, \quad \varphi(h) = \frac{3}{8} + \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \frac{3}{8}, \quad \text{limite finie.}$$

On peut donc prolonger φ_0 par continuité en 0 : on pose

$$\varphi(h) = \begin{cases} \varphi_0(h) & \text{si } h > 0, \\ 3/8 & \text{si } h = 0. \end{cases}$$

La fonction φ obtenue est alors continue sur $[0, +\infty[$. De plus :

$$\varphi(h) \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{h^2} \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{2h} \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0.$$

La fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$ et admet une limite finie aux deux extrémités de l'intervalle : l'intuition dit que φ sera bornée sur $[0, +\infty[$ pour cette raison. Montrons-le :

* Comme $\lim_{+\infty}(\varphi) = 0$, il existe un intervalle $[x_0, +\infty[$ et un majorant $M_1 \in \mathbb{R}$ tels que $|\varphi| \leq M_1$ sur $[x_0, +\infty[$.

* Sur le **segment** $[0, x_0]$, la fonction φ est continue, donc par le théorème des bornes atteintes, φ y est bornée (et atteint ses bornes) : il existe $M_2 \in \mathbb{R}$ tel que $|\varphi| \leq M_2$ sur $[0, x_0]$.

En posant $M := \max(M_1, M_2)$, on obtient que $|\varphi| \leq M$ sur $[0, +\infty[$: **φ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+$.**

Enfin, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 1$, on a $\frac{1}{nx} > 0$. Puisque $\varphi = \varphi_0$ sur $]0, +\infty[$, d'après (*) avec $x \leftarrow \frac{1}{nx}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{nx}}} = 1 - \frac{1}{2(nx)} + \frac{1}{(nx)^2} \varphi\left(\frac{1}{nx}\right).$$

d. Partons de la définition de $S(x)$:

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx} \times \sqrt{1 + \frac{1}{nx}}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} \times \left[1 - \frac{1}{2(nx)} + \frac{1}{(nx)^2} \varphi\left(\frac{1}{nx}\right) \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{nx}} \right]}_{u_n(x)} - \underbrace{\left[\frac{(-1)^n}{2(nx)^{3/2}} \right]}_{v_n(x)} + \underbrace{\left[\frac{(-1)^n}{(nx)^{5/2}} \varphi\left(\frac{1}{nx}\right) \right]}_{w_n(x)}. \end{aligned}$$

À $x > 0$ fixé, les trois séries $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$, $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ et $\sum_{n \geq 1} w_n(x)$ sont convergentes : la première par le CSSA, la seconde car elle est en $O(1/n^{3/2})$ et la troisième car elle est en $O(1/n^{5/2})$ puisque φ est une fonction bornée.

Par linéarité de la sommation, on obtient :

$$\forall x > 0, \quad S(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^{3/2}} + \frac{1}{x^{5/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{5/2}} \varphi\left(\frac{1}{nx}\right).$$

La fonction φ étant bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a $\|\varphi\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+} < +\infty$ et :

$$\forall x > 0, \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{5/2}} \varphi\left(\frac{1}{nx}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\varphi\|_{\infty}^{\mathbb{R}_+}}{n^{5/2}}, \quad \text{indépendant de } x.$$

Cela prouve que le dernier terme du développement asymptotique est un $O(1/x^{5/2})$.

Conclusion : On a démontré que :

$$S(x) = 1 + \frac{\beta}{\sqrt{x}} + \frac{\gamma}{x\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right) \quad \text{où} \quad \beta := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \gamma := -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}.$$