1 D'après e3a PSI 2012 et CCP PSI 09

1. Fick s'est appuyé sur la loi de Fourier (transferts thermiques) pour élaborer sa théorie.

2. La loi de Fick s'écrit $\boxed{\vec{j}_D = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n}$. Ce n'est pas une loi fondamentale ; elle a été établie sur un modèle linéaire, en partant du constat que quand une substance n'est pas de concentration uniforme, elle diffuse depuis les zones de forte concentration vers les zones moins concentrées. Et le courant de particules est d'autant plus fort que la concentration varie plus vite spatialement, d'où le gradient. Ainsi, $\vec{j}_D$ est de sens opposé à $\overrightarrow{\text{grad}}\,n$.

3. Bilan de matière sur un volume élémentaire de section S et d'épaisseur dx :

$$\boxed{n(x,t+dt)S\,dx = n(x,t)S\,dx + j_D(x,t)S\,dt - j_D(x+dx,t)S\,dt}$$

d'où $\dfrac{\partial n}{\partial t} + \dfrac{\partial j_D}{\partial x} = 0$, ce qui donne bien l'équation de la diffusion : $\dfrac{\partial n}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2}$.

4. Par une analyse dimensionnelle, $\frac{n}{\tau} \sim D\frac{n}{L^2}$,d'où $\boxed{L \sim \sqrt{D\tau}}$.caractéristique L du phénomène de diffusion en fonction de l'ordre de grandeur τ de sa durée et du coefficient de diffusion D.

5. Dans le cas où le coefficient de diffusion varie avec la concentration de l'espèce diffusante, il faut revenir à l'équation aux dérivées partielles $\boxed{\dfrac{\partial n}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D\dfrac{\partial n}{\partial x}\right)}$ car on ne peut plus sortir le D de la dérivée.

6. $\boxed{\vec{j}_T = n\vec{v}}$ pour la seule convection. Le bilan de matière donne alors $\dfrac{\partial n}{\partial t} + \dfrac{\partial j_D}{\partial x} + \dfrac{\partial j_T}{\partial x} = 0$. Dans le cas particulier où D et v sont indépendants de la densité de particules (donc de x), on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + v\frac{\partial n}{\partial x} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0}$$

7.
On remplace l'expression de N(x,t) dans l'équation de A3 :

$$\frac{-K}{2t^{3/2}}exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) + \frac{K}{\sqrt{t}}\frac{ax^2}{t^2}exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{DK}{\sqrt{t}}\left(-\frac{2ax}{t}\right)exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right)\right)$$

Ou : $\dfrac{-K}{2t^{3/2}} + \dfrac{K}{\sqrt{t}}\dfrac{ax^2}{t^2} = \dfrac{DK}{\sqrt{t}}\left(-\dfrac{2a}{t} + \dfrac{4a^2x^2}{t^2}\right)$,

soit $\dfrac{-1}{2} + \dfrac{ax^2}{t} = D\left(-2a + \dfrac{4a^2x^2}{t}\right)$,

puis $(4aD-1)\left(1 - \frac{2ax^2}{t}\right) = 0$

Ceci devant être vrai pour tout x et tout t, on en déduit $\boxed{4aD = 1}$.

A t fixé, le nombre total de particules doit à la fois être N_0 (par conservation des particules) et à la fois l'intégrale par rapport à x de $SN(x,t)$ entre 0 et l'infini :

$$SN_0 = \int_0^\infty \frac{K}{\sqrt{t}}exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right)S\,dx$$

Soit $N_0 = \int_0^\infty \frac{K}{\sqrt{t}}exp(-4aDu^2)2\sqrt{Dt}\,du$

$= K\int_0^\infty exp(-u^2)2\sqrt{D}du = K\sqrt{\pi D}\,\text{erf}(\infty)$

On en déduit $\boxed{K = \frac{N_0}{\sqrt{\pi D}}}$.

8. On voit que $N(x,t)$ tend à devenir de plus en plus constant par rapport à x à mesure t augmente, car la concentration s'homogénéise.
L'aire sous chaque courbe (prise jusqu'à x infini) vaut $\boxed{N_0}$.
Pour t = 1h, on trouve $\boxed{L = 0{,}7\ \mu m}$.

9. Pour déterminer le coefficient de diffusion D du silicium dans AsGa, on peut placer un capteur en x=0 (donc en surface, et y enregistrer N(0,t) en fonction du temps, puis tracer N(0,t) en fonction de $\frac{1}{\sqrt{t}}$, et la courbe devrait être une droite, de pente $\frac{N_0}{\sqrt{\pi D}}$. Connaissant N_0, on accède à D.
Pour estimer l'ordre de grandeur du coefficient de diffusion D, on utilise $D \sim \frac{L^2}{\tau}$, avec :

L = 0,7 µm pour $\tau = 1$h,
L = 1,0 µm pour $\tau = 2$h,
L = 1,7 µm pour $\tau = 6$h.

A chaque fois, on trouve environ $D = 1{,}4.10^{-16}\ \text{m}^2.\text{s}^{-1}$

2

1°) Puisque les particules sont plus denses que le solvant, elles vont avoir tendance à tomber lentement au fond du récipient. On pourrait s'attendre à ce qu'elles s'accumulent toutes au fond. Mais comme elles sont petites, elles vont pouvoir remonter grâce à l'agitation thermique. Il va donc se créer un courant ascendant, dû à la diffusion des particules, ascendant car dirigé des hautes concentrations vers les faibles. On devrait donc observer un dégradé de couleur : une couleur bleue intense au fond, et bleu de plus en plus clair à mesure qu'on se rapproche de la surface.

2°) Chaque particule (masse m) est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à la force $\vec{F} = -\frac{\vec{v}}{\mu}$.

a) µ est ici homogène à une vitesse divisée par une force. Son unité est $\text{m.s}^{-1}.\text{N}^{-1}$, c'est-à-dire $\text{kg}^{-1}.\text{s}$.
En appliquant le principe fondamental de la dynamique à une particules, on obtient : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{g} - m\frac{\rho_s}{\rho_m}\,\vec{g} - \frac{\vec{v}}{\mu}$,
soit : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\mu m} = \vec{g}\left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_m}\right)$.
Il y a donc bien une vitesse limite (la solution particulière de l'équation complète) : $\overrightarrow{v_{lim}} = \mu m\vec{g}\left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_m}\right)$
Et la solution de l'équation différentielle est :
$\vec{v}(t) = \mu m\vec{g}\left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_m}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, avec $\tau = \mu m$.

b) La densité volumique de courant de particules $\vec{j}_g$ due à la gravitation est $\vec{j}_g = C(z)\,\vec{v}\,(t)$, puis son expression approchée en admettant que la vitesse limite est atteinte quasi-instantanément :

$$\vec{j}_g \simeq C(z)\mu m\vec{g}\left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_m}\right)$$

3°) Il apparaît alors une hétérogénéité de concentration : $C(z)$ donc un courant de diffusion de particules. La densité volumique de courant de particules $\vec{j}_d$ due à la diffusion est, conformément à la loi de Fick : $\vec{j}_d = -D\overrightarrow{\text{grad}}C$.

4°) En régime stationnaire, le courant ascendant, dû à la diffusion, et le courant descendant dû à la gravité doivent se compenser totalement : $\vec{j}_d + \vec{j}_g = \vec{0}$, d'où, en projetant selon (Oz), axe vertical ascendant :

$-D\frac{dC}{dz} - C\mu mg\left(1 - \frac{\rho_S}{\rho_m}\right) = 0$,

c'est-à-dire, en posant $H = \frac{D}{\mu mg\left(1-\frac{\rho_S}{\rho_m}\right)}$, $\quad \frac{dC}{dz} + \frac{C}{H} = 0$.

La solution est bien $C(z) = C(0)e^{-z/H}$.

Application numérique : $H = 2{,}2\ cm$