

MF0 : Statique des fluides

Ce chapitre, qui figure au programme de première année PCSI, donnera l'occasion aux étudiants issus de cette filière, de consolider les compétences qui y sont associées ; il est aussi destiné à mettre en place des notions et des notations qui seront reprises dans l'étude des fluides en mouvement. Dans tout le chapitre, le référentiel d'étude est supposé galiléen.

1 Introduction

1.1 Les différentes échelles importantes

Un **fluide** est un milieu matériel déformable, dans lequel les particules constitutives (atomes, molécules, ions) peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres sur de grandes distances par rapport à leur taille caractéristique D .

Un fluide est qualifié de **gaz** lorsque les distances inter-particules sont grandes devant D (sauf au moment des chocs) ; il occupe alors tout le volume mis à sa disposition.

Un fluide est qualifié de **liquide** lorsque les distances inter-particules sont comparables à D , ce qui rend leurs interactions (forces de Van der Waals) importantes ; un liquide a un volume propre.

Il existe des conditions de température et de pression (au-delà du point critique) pour lesquelles les corps purs ne peuvent plus exister sous les deux formes, liquide et gaz ; on parle alors simplement d'état fluide.

Les fluides peuvent être observés à différentes échelles :

- l'**échelle macroscopique**, dont la dimension caractéristique, notée L , est celle de la zone de fluide étudiée ;
- l'**échelle microscopique**, dont la dimension caractéristique, notée ℓ , est le **libre parcours moyen**, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux chocs ;
- l'**échelle mésoscopique**, dont la dimension caractéristique, notée a , est intermédiaire (sauf lorsque cela est impossible) entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique :

$$\ell \ll a \ll L.$$

À l'échelle microscopique, le fluide est un milieu **discret**. Afin de pouvoir malgré tout le considérer comme un milieu **continu**, il est nécessaire de ne pas l'observer à cette échelle ; c'est pourquoi on introduit cette notion d'échelle mésoscopique.

Exemple

Deux exemples fixent les idées :

- dans l'air, à 300 K, sous une pression de 1 bar, le libre-parcours moyen d'une molécule est de l'ordre de 70 nm ($\ell \approx 10^{-7}$ m) ; si le système fluide étudié est l'air contenu dans une salle de classe, dont la taille caractéristique est de quelques mètres ($L \approx 1$ m), on peut prendre par exemple $a = 0,1$ mm, ou bien $a = 1$ mm ;
- dans un liquide, le libre-parcours moyen est comparable au diamètre des molécules, de l'ordre de quelques centaines de pm ($\ell \approx 10^{-10}$ m) ; si le système fluide étudié est l'eau contenue dans une cuve, dont la taille caractéristique est de quelques décimètres ($L \approx 0,1$ m), on peut prendre par exemple $a = 0,01$ mm, ou bien $a = 0,1$ mm.

Remarque

Il n'est pas toujours possible de travailler à une échelle mésoscopique. Par exemple dans les hautes couches de l'atmosphère, le libre parcours moyen ℓ devient comparable à la dimension caractéristique L du système fluide étudié (par exemple le fluide entourant un engin spatial). Le fluide ne peut alors plus être modélisé comme un milieu continu.

1.2 Notion de particule de fluide

Une **particule de fluide** est un système fermé (donc de masse δm constante au cours du temps), correspondant au fluide situé à l'intérieur d'un volume $d\tau$ de taille mésoscopique.

Un tel volume contient un très grand nombre de molécules, ce qui permet d'y définir des grandeurs intensives macroscopiques telles que la pression P , la température T .

Mais en même temps, ce volume est infinitésimal par rapport au volume macroscopique. On peut donc considérer qu'il y existe un équilibre thermodynamique local, et que les grandeurs macroscopiques intensives sont uniformes à l'échelle mésoscopique (c'est-à-dire indépendantes des coordonnées d'espace). On parle de grandeurs **locales**. $P(M)$, $T(M)$, sont la pression et la température du fluide dans la particule de fluide située au voisinage du point M . Elles varient continument à l'échelle macroscopique.

Masse volumique La masse volumique d'un fluide est le rapport de la masse au volume d'une particule de fluide ; c'est une grandeur intensive :

$$\mu(M) = \frac{\delta m}{\delta \tau}(M) \quad \mu \text{ est en } \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Un fluide est qualifié de **compressible** si sa masse volumique dépend des conditions ambiantes (pression et température), donc de la particule de fluide considérée : $\mu = \mu(M)$.

Il est qualifié d'**incompressible** si sa masse volumique μ est une constante, caractéristique de ce fluide. Un gaz, qui occupe toujours tout le volume mis à sa disposition, est un fluide compressible. Un liquide, au sein duquel les molécules sont très proches, et interagissent fortement, est peu compressible. En première approximation, un liquide peut être considéré comme incompressible.

Remarque

Si on tient compte de la réalité microscopique d'un fluide, une particule de fluide n'est pas un système fermé au sens strict. En effet, du fait de l'agitation thermique, il y a en permanence des molécules qui entrent dans le volume mésoscopique $d\tau$ et d'autres qui en sortent. Mais par définition de la particule de fluide, ces flux entrant et sortant s'équilibrent, ce qui lui permet de conserver une masse δm constante au cours du temps. En statique des fluides, il n'y a pas d'écoulement, c'est-à-dire pas de mouvement à l'échelle macroscopique, donc les particules de fluides sont immobiles. Et si les grandeurs intensives sont invariables dans le temps, les particules de fluides conservent leur forme et leur volume au cours du temps. Il n'en sera pas de même dans l'étude des fluides en écoulement.

2 Forces dans un fluide au repos

2.1 Notations

De manière générale, on adopte les notations indiquées sur la figure 1 : un point courant à l'intérieur d'un volume V sera noté M , et un point courant sur la surface S délimitant V sera noté N . Les éléments de volume et de surface, dans les voisinages de ces deux points seront notés $d\tau$ et dS .

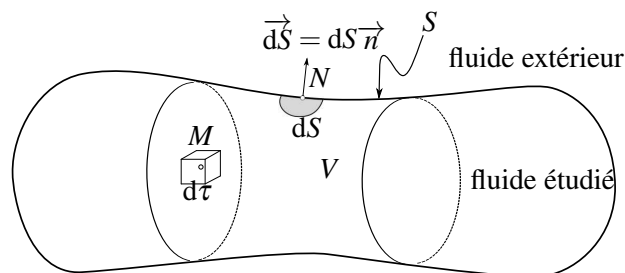


Figure 1 – Éléments de volume et de surface.

2.2 Forces de volume

a) Notion de force de volume

Les **forces de volume** correspondent aux actions mécaniques de longue portée, et agissent au cœur du fluide étudié.

En reprenant à nouveau les notations de la figure 1, on peut écrire la force élémentaire exercée en M sur le volume $d\tau$ du fluide $\vec{\delta F}_V(M) = \vec{\phi}(M) d\tau$.

La **densité volumique de force** en M , ou **force volumique**, est :

$$\vec{\phi}(M) = \frac{\vec{\delta F}_v(M)}{d\tau}.$$

En ce qui concerne l'unité dans le Système international :

$$\phi \text{ est en } \text{N} \cdot \text{m}^{-3}.$$

b) Exemples de densités volumiques de forces

- **Densité volumique de force de pesanteur :**

$$\vec{\phi}_{pes}(M) = \mu(M) \vec{g}(M),$$

μ étant la masse volumique ;

- **Densité volumique de force électrique :**

$$\vec{\phi}_{elm}(M) = \rho(M) \vec{E}(M),$$

ρ étant la densité volumique de charge et $\vec{E}$ le champ électrique ; on reconnaît, dans l'expression ci-dessus, la loi de force de Lorentz, exprimée ici non pas pour une charge ponctuelle mais pour une charge répartie en volume, cette charge étant fixe dans le cadre de la statique des fluides.

2.3 Force de pression

La pression dans un fluide correspond à des actions de contact, c'est-à-dire des actions de courte portée : interactions répulsives liées à l'agitation moléculaire (chocs, répulsions électrostatiques à courte distance) et interactions (en général attractives) associées aux forces entre dipôles. En un point N de la surface fermée S délimitant le fluide étudié, la force de pression élémentaire exercée par le fluide extérieur sur le fluide étudié est donnée par :

$$\vec{\delta F}_{pression}(N) = -P(N) d\vec{S}(N) = -P(N) dS \vec{n}(N),$$

$d\vec{S}(N)$ étant, dans le voisinage de N , dirigé de l'intérieur de S vers l'extérieur, c'est-à-dire selon la normale sortante $\vec{n}(N)$, conformément aux notations de la figure 1.

La force de pression est orthogonale à la surface sur laquelle elle s'applique.

Puisque la force de pression traduit des actions de contact, elle est qualifiée de force de surface.

La **contrainte surfacique** de pression, ou **densité surfacique de force** de pression en N , ou **force surfacique**, est :

$$\vec{\tau}_s(N) = -P(N) \vec{n}(N) = \frac{\vec{\delta F}_{pression}(N)}{dS}.$$

En ce qui concerne les unités dans le Système international :

$$P \text{ est en Pa, ou en } \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$\tau_s \text{ est en Pa, ou en } \text{N} \cdot \text{m}^{-2}.$$



La pression est une grandeur **scalaire**. Ne pas la confondre avec la force de pression qui, elle, est une grandeur **vectorielle**.

Complément : pression et surpression On évolue quasiment en permanence dans l'atmosphère, qui est un milieu **pressurisé**. La pression qui y règne, souvent notée P_0 est **loin d'être négligeable**.

Dans les conditions dites standard, $P_0 = 1.10^5$ Pa, et chaque cm^2 de surface subit une force de pression de 10 N , donc l'équivalent du poids d'une masse d'environ 1 kg. C'est considérable !

Pourtant, au quotidien, on ne ressent pas ces forces pressantes, tout simplement parce que leurs effets se compensent quasiment toujours : l'intérieur des poumons et l'extérieur du corps ; l'intérieur et l'extérieur d'un pneu « non gonflé », etc.

C'est la raison pour laquelle il est souvent utile de ne s'intéresser qu'à la **surpression**, c'est-à-dire la différence $\Delta P = P - P_0$ entre la pression P et la pression ambiante P_0 .

Quand on « gonfle un pneu à 2 bars », cela signifie que l'on impose une surpression de 2 bars à l'intérieur, par rapport à l'extérieur. La pression qui règne à l'intérieur de la chambre est de l'ordre de 3 bars.

Quand on étudie les actions mécaniques subies par un barrage hydraulique, on doit prendre en compte les effets, non pas de la **pression**, mais de la **surpression** due à la présence de l'eau quand le barrage est rempli. En effet, en l'absence d'eau, le barrage est soumis aux forces pressantes exercées par l'atmosphère, de part et d'autre, et celles-ci se compensent.

Les effets de la pression ambiante sont toutefois à prendre en compte dans certaines situations. Par exemple lors de l'utilisation de ventouses, ou plus généralement lorsque l'on crée un vide partiel (« dépression ») dans une enceinte ou dans une zone de l'espace.

2.4 Équivalent volumique des actions de pression

On considère une particule de fluide mésoscopique, en forme de parallélépipède rectangle, comme le montre la figure 2.

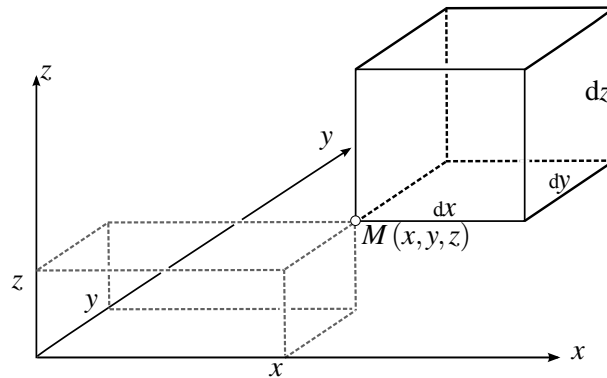


Figure 2 – Particule de fluide.

Cette particule de fluide est soumise aux forces de pression sur chacune de ses 6 faces. La résultante de ces forces est :

$$\begin{aligned}\vec{\delta F}_{\text{pression}}(x, y, z) = & (P(x, y, z) - P(x + dx, y, z)) dy dz \vec{u}_x \\ & + (P(x, y, z) - P(x, y + dy, z)) dz dx \vec{u}_y \\ & + (P(x, y, z) - P(x, y, z + dz)) dx dy \vec{u}_z,\end{aligned}$$

ce que l'on peut encore écrire, au premier ordre en dx , dy et dz :

$$\vec{\delta F}_{\text{pression}}(x, y, z) = -\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) dx dy dz \vec{u}_x - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) dy dz dx \vec{u}_y - \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) dz dx dy \vec{u}_z,$$

ou encore :

$$\vec{\delta F}_{\text{pression}}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) \vec{u}_x + \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \vec{u}_y + \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) \vec{u}_z\right) d\tau.$$

On reconnaît l'opérateur de dérivation spatiale **gradient** :

$$\vec{\delta F}_{\text{pression}} = -\vec{\text{grad}} P d\tau.$$

L'étude qui précède montre que, bien que les forces de pression soient des forces de surface, il est possible de les prendre en considération en introduisant une densité volumique de force liée au gradient du champ de pression.

La **densité volumique de force de pression** est :

$$\vec{\phi}_{\text{pression}} = -\overrightarrow{\text{grad}} P.$$

Qualitativement, le signe moins s'interprète aisément : le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} P$ indique la direction dans laquelle la pression augmente spatialement le plus. La résultante des forces de pression s'exerçant sur un petit domaine est au contraire dirigée des zones de forte pression vers celles de basse pression.

2.5 Résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface fermée dans le cas d'une pression uniforme

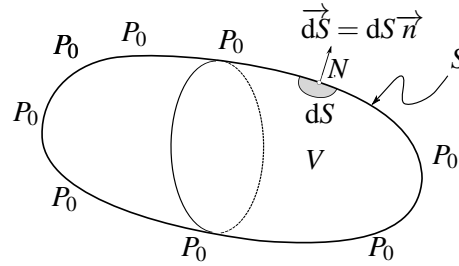


Figure 3 – Pression uniforme autour d'une surface fermée.

Soit un objet, de volume V , délimité par une surface S fermée, autour de laquelle règne une pression P_0 uniforme (c'est-à-dire indépendante des coordonnées d'espace), comme le montre la figure 3. Par une expérience de pensée, on peut ôter l'objet, et remettre à sa place le même fluide que celui qui l'entoure, à la pression uniforme P_0 . Dans le volume V de fluide remis en place, on a donc en tout point $\vec{\phi} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \vec{0}$. La résultante des forces de pression P_0 sur l'objet est alors :

$$\vec{F}_{\text{pression } P_0} = \iiint_V -\overrightarrow{\text{grad}}(P) d\tau = \vec{0}.$$

Lorsque le champ de pression est uniforme, la résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface **fermée** est nulle.

2.6 Application pratique

Sur la figure 4, la surface globale S , obtenue en réunissant S_1 et S_2 , est une surface fermée, le vecteur surface élémentaire étant partout orienté vers l'extérieur si on choisit $d\vec{S}_1$ sur la partie 1 et $d\vec{S}_2$ sur la partie 2. L'encadré du paragraphe précédent permet d'écrire $\iint_{S_1} P_0 d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} P_0 d\vec{S}_2 = \vec{0}$. Puisque $d\vec{S}'_1 = -d\vec{S}_1$, on obtient :

$$\iint_{S_1} P_0 d\vec{S}'_1 = \iint_{S_2} P_0 d\vec{S}_2,$$

les vecteurs $d\vec{S}'_1$ et $d\vec{S}_2$ étant définis sur la figure ci-dessous.

Lorsque le champ de pression est uniforme, pour calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur une surface ouverte S_1 , délimitée par un contour plan Γ , on peut « aplatir » cette surface pour la ramener dans le plan du contour.

Sur l'exemple de la figure 4, la résultante des forces de pression P_0 s'exerçant sur l'extérieur du bonnet à deux pointes est égale à celle de pression P_0 s'exerçant sur la surface plane grisée, orientée dans le sens de $d\vec{S}'_2$. Et puisque cette surface est plane et que la pression P_0 est uniforme, cette force vaut $P_0 S_2 \vec{n}_2$.



Ceci n'est vrai que si la pression régnant autour de la surface est **uniforme**, ou peut être considérée comme telle.

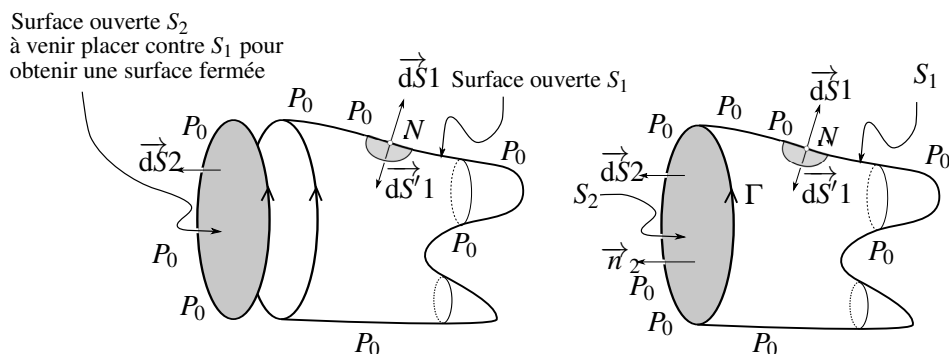


Figure 4 – Utilisation d'une surface plus simple.

3 Relation fondamentale de la statique des fluides

3.1 Expression générale

On rappelle que dans toute le chapitre, on se place dans un référentiel galiléen.

En y appliquant le **principe fondamental de la statique** à une particule de fluide, de masse δm , de volume $d\tau$, située dans le voisinage d'un point M , soumise à n forces de volume, de densités volumiques $\vec{\varphi}_i(M)$, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^n \vec{\varphi}_i(M) d\tau - \overrightarrow{\text{grad}} P(M) d\tau = \vec{0}.$$

La **relation fondamentale de la statique des fluides** est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \sum_{i=1}^n \vec{\varphi}_i.$$

3.2 Cas de la seule pesanteur

Dans le cas très fréquent où la seule force de volume réelle (en plus de l'équivalent volumique des forces de pression) est due à la pesanteur, la somme des $\vec{\varphi}_i$ se réduit à $\mu \vec{g}$, et la relation fondamentale de la statique des fluides devient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \mu \vec{g}.$$

Remarques

- Cette loi est parfois appelée **relation fondamentale de l'hydrostatique**.
- La relation fondamentale de la statique des fluides est une loi **locale**. Elle n'est pas attachée à un système matériel.

Dans des conditions ordinaires de température et de pression, la masse volumique d'un gaz est très inférieure à celle d'un liquide : $\frac{\mu_{\text{gaz}}}{\mu_{\text{liquide}}} \ll 1$. Typiquement, ce rapport est de l'ordre de 10^{-3} . À titre d'exemple, $\mu_{\text{eau}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et, dans les conditions ordinaires de température et de pression, $\mu_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Dans une situation mettant en présence à la fois des gaz et des liquides, on pourra négliger l'évolution de la pression avec l'altitude dans le gaz, et ne la considérer que dans le liquide.

4 Évolution de la pression au sein d'un fluide incompressible dans un champ de pesanteur uniforme

Obtention de la loi On considère un fluide incompressible, c'est-à-dire dont la masse volumique μ est constante (indépendante du temps) et uniforme (indépendante des coordonnées d'espace). On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. On adopte un système de coordonnées cartésiennes, l'axe (Oz) étant vertical **ascendant**. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme.

En l'absence de forces volumiques autres que celle de pesanteur, la relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit, dans le référentiel galiléen choisi, et après projection dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu g \end{pmatrix}.$$

Les deux premières lignes montrent que la pression ne dépend ni de x ni de y . C'est donc une fonction d'une seule variable, z , et la dernière équation conduit à $\frac{dP}{dz} = -\mu g$. L'intégration de cette équation différentielle donne : $P(z) = -\mu g z + K$.

La constante K se détermine grâce à la pression régnant à l'altitude $z = 0$:

$$P(z) = -\mu g z + P(0).$$

 Une erreur de signe dans la relation $P(z)$ est facilement décelable : plus on remonte vers la surface d'un liquide, plus la pression diminue. Ne pas oublier qu'ici (Oz) est ascendant.

Remarques

- La relation $P(z)$ obtenue est assez bien vérifiée par les liquides, fluides très peu compressibles ;
- l'augmentation de la pression avec la profondeur est provoquée par le poids de la colonne de fluide se trouvant au-dessus ;
- il est important de noter qu'au sein d'un fluide incompressible homogène à l'équilibre, la pression ne dépend que de l'altitude. Sur la figure 5, les points A_1, B_1, C_1, D_1 et E_1 sont à la même pression $P(z_1)$. De même, A_2 et B_2 sont tous deux à la pression $P(z_2) = P_0$.

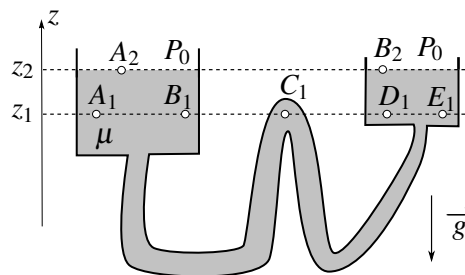


Figure 5 – Points de même pression.

Expérience

Application au baromètre de Toricelli Un tube, rempli de mercure est retourné sur une cuve, contenant également du mercure, comme l'illustre la figure 6. L'atmosphère, qui exerce une pression P_0 sur la surface libre du mercure dans la cuve, empêche le tube de se vider. Si le tube a une hauteur de quelques dizaines de centimètres, il est entièrement rempli de mercure. En revanche, si sa hauteur est supérieure à 76 cm, une poche de « quasi-vide » se forme dans le tube au-dessus de la colonne de mercure liquide, de hauteur h . La mesure de h donne accès à la pression P_0 qui s'exerce sur la surface libre et empêche le liquide de sortir du tube.

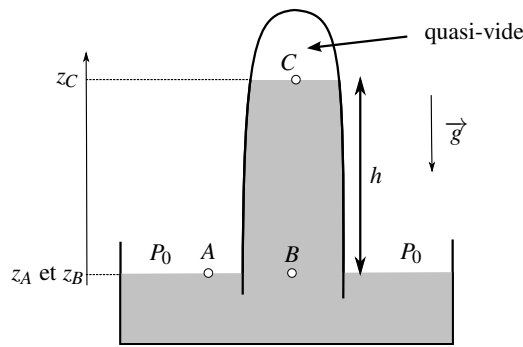


Figure 6 – Baromètre de Toricelli.

On a, d'une part $P(z_A) = P(z_B)$, et d'autre part $P(z_B) - P(z_C) = -\mu g(z_B - z_C) = +\mu gh$. Or, $P(z_C) \simeq 0$, puisqu'au-dessus de la colonne de mercure règne un quasi-vide (en réalité de la vapeur saturante de mercure, de pression 0,3 Pa à température ordinaire). Finalement :

$$P_0 = \mu gh.$$

Pourquoi utiliser le mercure plutôt que l'eau pour réaliser un baromètre de Toricelli ? Prenons $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. Pour une pression $P_0 = 1,0 \text{ bar}$, $\mu_{\text{mercure}} = 13,5.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ donne $h_{\text{mercure}} = 0,76 \text{ m}$, tandis que $\mu_{\text{eau}} = 1,0.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ donne $h_{\text{eau}} \simeq 10 \text{ m}$. Il y a donc un réel problème d'encombrement !

Application aux circuits hydrauliques On considère un flexible, rempli d'un liquide homogène, reliant deux réservoirs, de sections S_A et S_B . Attendu qu'au sein d'un fluide homogène en équilibre dans un champ de pesanteur uniforme, la pression ne dépend que de l'altitude, la pression est la même en A et en B sur le schéma de la figure 7 : $P_A = P_B$. En revanche, les forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ exercées par le liquide sur les pistons posés dessus sont différentes, si les sections S_A et S_B ne sont pas égales, puisque $\|\vec{F}_A\| = P_A S_A$ et $\|\vec{F}_B\| = P_B S_B$. Schématiquement, il est ainsi possible d'assurer un équilibre de l'ensemble en plaçant une fourmi sur le piston de petite section S_B , et un éléphant sur le piston de grande section S_A .

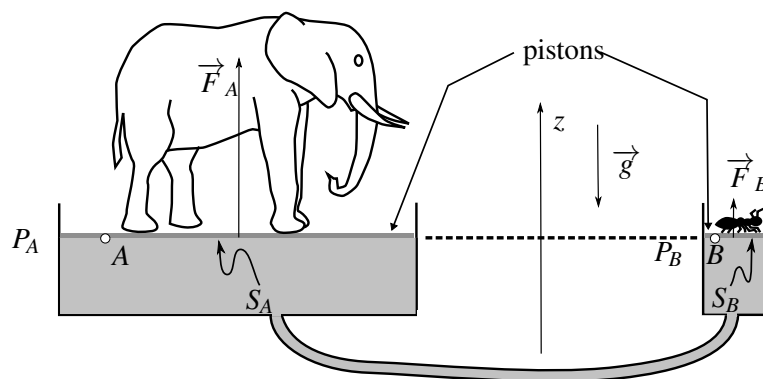


Figure 7 – Schéma de principe d'un circuit hydraulique.

On retrouve ici le principe de fonctionnement des circuits hydrauliques, qui permettent par exemple d'exercer des forces importantes sur les mâchoires d'un disque de frein de véhicule, bien que le conducteur n'exerce sur la pédale de frein qu'un effort bien moindre. Il s'agit d'une démultiplication, semblable à celle que produit un ensemble d'engrenages. Bien évidemment, si on réduit la force à appliquer, on augmente en même temps le chemin à parcourir lors d'un déplacement. Ceci se démontre par un raisonnement énergétique.

5 Évolution de la pression au sein d'un gaz parfait isotherme dans un champ de pesanteur uniforme

Si le modèle de fluide incompressible convient assez bien pour un liquide, il n'en est pas de même pour un gaz, dont la masse volumique peut évoluer sensiblement avec la pression et la température. On se limite ici à une atmosphère isotherme, et au

modèle du gaz parfait, dont on rappelle l'équation d'état : $PV = nRT = \frac{m}{\mathcal{M}}RT$, $\mathcal{M}$ étant sa masse molaire. Une particule de fluide de masse δm occupe donc un volume $d\tau$, avec $Pd\tau = \frac{\delta m}{\mathcal{M}}RT$.

La masse volumique du gaz parfait peut donc s'écrire :

$$\mu = \frac{\delta m}{d\tau} = \frac{P\mathcal{M}}{RT}.$$

En l'absence de forces volumiques autres que celle de pesanteur, la relation fondamentale de la statique des fluides conduit, comme dans le paragraphe précédent à $\frac{dP}{dz} = -\mu g$. En remplaçant μ par son expression fonction de la pression, il vient $\frac{dP}{dz} + \frac{\mathcal{M}g}{RT}P = 0$, ce qui constitue une équation différentielle linéaire homogène, du premier ordre, à coefficients constants, que l'on peut encore écrire :

$$\frac{dP}{dz}(z) + \frac{1}{H}P(z) = 0,$$

en introduisant une distance caractéristique $H = \frac{RT}{\mathcal{M}g}$, appelée **hauteur d'échelle**. La solution de cette équation différentielle est :

$$P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) = P(0) \exp\left(-\frac{\mathcal{M}gz}{RT}\right).$$



Ce calcul n'est valable que si l'on adopte pour le gaz le modèle du gaz parfait, et si la température et le champ de pesanteur sont uniformes, avec un axe (Oz) vertical ascendant.

Remarques

- on pouvait également intégrer l'équation différentielle en séparant les variables : $\frac{dP}{P} = -\frac{\mathcal{M}g}{RT}dz$ conduit à $\ln P(z) = -\frac{\mathcal{M}gz}{RT} + \ln P(0)$, puis au résultat obtenu plus haut ;
- dans le cas de l'air, $\mathcal{M} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ et $T = 273 \text{ K}$, donnent $H \simeq 8 \text{ km}$. Avec ce modèle simple d'atmosphère isotherme, à une altitude de $3H$, c'est-à-dire environ 3 fois la hauteur de l'Everest, la pression vaut 5% de sa valeur au niveau de la mer. Bien que la température varie avec l'altitude, ce modèle donne des ordres de grandeur intéressants jusqu'à environ 100 km d'altitude, où la pression est de l'ordre de 10^{-2} Pa . Au-delà, la pression diminue moins vite avec l'altitude.

Facteur de Boltzmann On rappelle que la constante de Boltzmann k_B est liée à la constante R des gaz parfaits et au nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A$ par la relation $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A}$.

Le terme $\exp\left(-\frac{\mathcal{M}gz}{RT}\right)$ peut aussi s'écrire $\exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$, m étant la masse d'une molécule du gaz parfait. Il s'agit d'un facteur de Boltzmann. Il traduit la compétition entre deux phénomènes physiques : la pesanteur, d'énergie potentielle moléculaire mgz , qui tend à faire s'accumuler les molécules de gaz près du sol, et l'agitation thermique, d'énergie moléculaire $k_B T$, qui conduit les molécules de gaz à tenter d'occuper tous les niveaux d'énergie disponibles.

Le **facteur de Boltzmann** est le terme $\exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$, où $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann.

6 Poussée d'Archimède

6.1 Notion

Il existe un certain nombre de grandeurs physiques, que l'on utilise fréquemment dans le langage courant, et dont on a la sensation de bien connaître le sens... jusqu'à ce qu'on soit sollicité pour en donner une définition. La poussée d'Archimède en fait certainement partie.

Pourquoi utiliser un nouveau vocabulaire pour parler des actions mécaniques dans un fluide au repos, alors que l'inventaire des forces a déjà été dressé plus haut : forces de surface (forces de pression) et forces de volume (pesanteur et électromagnétique). Que représente la poussée d'Archimède par rapport à tout cela ?

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, la **poussée d'Archimède** $\vec{\Pi}_A$ est la résultante des forces de pression exercées sur un objet immobile dans $\mathcal{R}$, par l'ensemble des fluides au repos qui l'entourent.

6.2 Théorème d'Archimède

Comme on l'a vu dans le paragraphe 2.5, si la pression est uniforme tout autour de l'objet, délimité par une surface fermée, la résultante des forces de pression est nulle. Il n'y a donc pas de poussée d'Archimède.

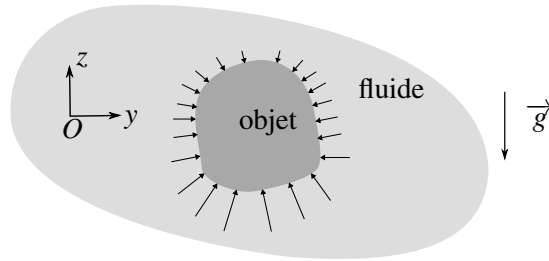


Figure 8 – Forces pressantes au sein d'un fluide en équilibre dans un champ de pesanteur.

Au sein d'un fluide en équilibre dans un champ de pesanteur, la pression n'est pas uniforme ; elle augmente à mesure que l'altitude diminue, comme on l'a vu aux paragraphes 4 et 5. Un objet placé dans le fluide subit donc des forces pressantes plus importantes sur le dessous que sur le dessus, comme le montre la figure 8.

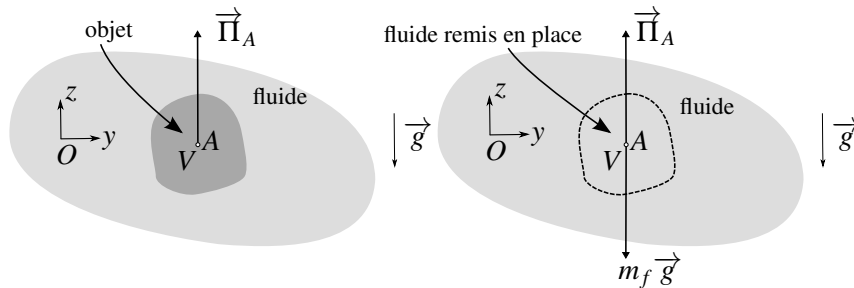


Figure 9 – Remise en place du « fluide déplacé ».

Par une expérience de pensée, retirons l'objet, de volume V , et remplaçons-le par le fluide, de même forme et de même volume V , occupant la même position, comme le montre le schéma de droite de la figure 9. Puisque l'ensemble du fluide est supposé en équilibre, la portion de fluide remise en place l'est aussi. Soit m_f la masse de ce volume V de fluide. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, supposé galiléen, le principe fondamentale de la statique conduit à :

$$m_f \vec{g} + \vec{\Pi}_A = \vec{0},$$

$\vec{\Pi}_A$ représentant la résultante des forces de pression s'exerçant aussi bien sur le fluide remis en place que sur l'objet, c'est-à-dire la poussée d'Archimède.

Il vient donc :

$$\vec{\Pi}_A = -m_f \vec{g}.$$

On peut alors énoncer le **théorème d'Archimède** :

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces de pression exercées par un fluide au repos sur un objet immobile qu'il entoure, est verticale ascendante, et égale à l'opposé du poids du fluide déplacé. On la nomme **poussée d'Archimède**.