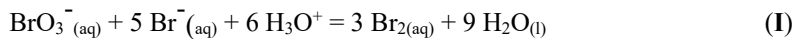


Problème n°1 : Chimie (à faire sans calculatrice, comme cela se fait à Mines-Ponts)

Le dibrome peut être synthétisé en laboratoire en faisant réagir du bromate de sodium (NaBrO_3) et du bromure de sodium (NaBr). L'équation de la réaction est la suivante :



- 1- La vitesse volumique de la réaction est : $v = k [\text{BrO}_3^- (\text{aq})]^a [\text{Br}^- (\text{aq})]^b [\text{H}_3\text{O}^+]^c$.

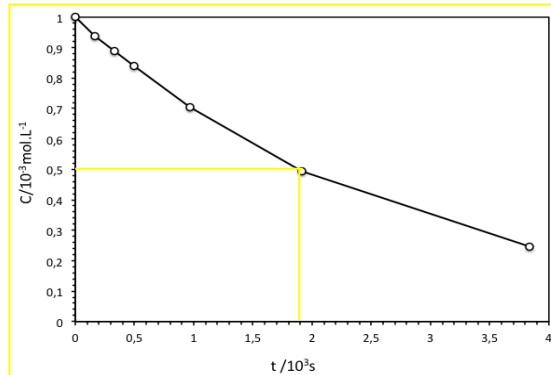


Fig. 3 : Evolution de la concentration en ions bromate (mmol.L^{-1}) en fonction du temps (10^3s)

- 2- Pour réaliser cette expérience, on a choisi de mettre Br^- et H_3O^+ en large excès, de manière à créer les conditions d'une **dégénérescence d'ordre**. Ces deux ions seront ainsi de concentration quasi-constante. On peut donc simplifier l'expression de

la vitesse volumique de la réaction donnée à la question précédente : $v \approx k [\text{BrO}_3^- (\text{aq})]^a [\text{Br}^- (\text{aq})]_0^b [\text{H}_3\text{O}^+]_0^c$

- 3- Le temps de demi-réaction relatif aux ions bromate est **le temps au bout duquel la concentration en ions bromate ne vaut plus que la moitié de sa valeur initiale**.

En utilisant la figure 3, on trouve $t_{1/2} = 1,9 \cdot 10^3 \text{ s}$

- 4- Dans le cas où la réaction est d'ordre 1 par rapport aux ions bromate, $\frac{d[\text{BrO}_3^- (\text{aq})]}{dt} = -k' [\text{BrO}_3^- (\text{aq})]$,

d'où $[\text{BrO}_3^- (\text{aq})] = [\text{BrO}_3^- (\text{aq})]_0 e^{-k't}$, ou encore : $C(t) = C_0 e^{-k't}$

Dans le cas où la réaction est d'ordre 2 par rapport aux ions bromate, $\frac{d[\text{BrO}_3^- (\text{aq})]}{dt} = -k' [\text{BrO}_3^- (\text{aq})]^2$,

d'où $\frac{1}{[\text{BrO}_3^- (\text{aq})]} = \frac{1}{[\text{BrO}_3^- (\text{aq})]_0} + k't$, ou encore $\frac{1}{C(t)} = \frac{1}{C_0} + k't$.

- 5- On voit que sur la figure 4, les points sont bien alignés, alors que ce n'est pas le cas pour la figure 5. La cinétique est donc **d'ordre partiel 1 par rapport aux ions bromate**. En effet, d'après la question précédente, $\ln(C) = \ln(C_0) - k't$.

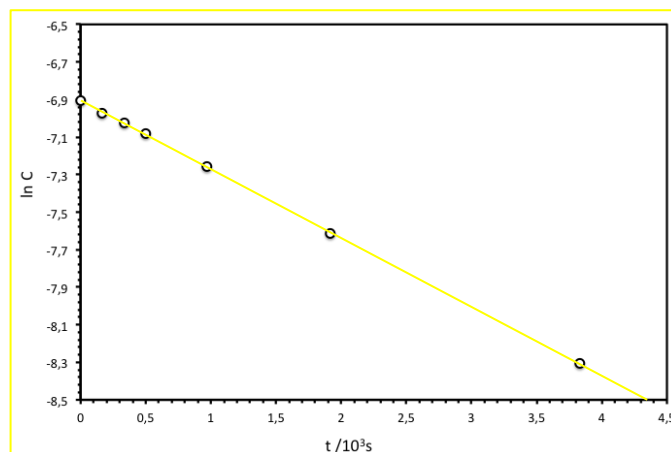


Figure 4 : Evolution du logarithme de la concentration en ions bromate en fonction du temps (10^3s).

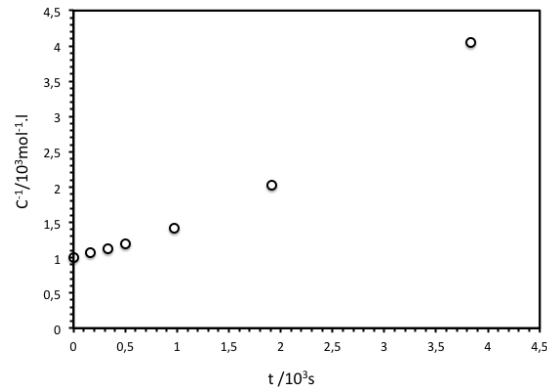


Figure 5 : Evolution de l'inverse de la concentration en ions bromate en fonction du temps (10^3 s).

6- La vitesse initiale est : $v(0) = k [\text{BrO}_3^-]_0^1 [\text{Br}^-]_0^b [\text{H}_3\text{O}^+]_0^c$.

Or, on voit que (expériences 1 et 2) si on multiplie $[\text{Br}^-]_0$ par 1,5, sans changer $[\text{BrO}_3^-]_0$ ni $[\text{H}_3\text{O}^+]_0$, $v(0)$ est aussi multiplié par 1,5, donc l'ordre partiel est aussi de 1 par rapport aux ions bromures.

Et on voit que (expériences 1 et 3) si on multiplie $[\text{H}_3\text{O}^+]_0$ par 2, sans changer $[\text{BrO}_3^-]_0$ ni $[\text{Br}^-]_0$, $v(0)$ est multiplié par 4, donc l'ordre partiel est de 2 par rapport aux ions H_3O^+ .

Problème n°2 : SIGNAUX NUMÉRIQUES

1°) Lors d'une première observation, la base de temps est fixée à 5,0 ms par division.

a) Durée totale d'acquisition : 10 divisions et 5,0 ms/div d'où $T_{a1} = 50$ ms.

b) Période d'échantillonnage : $T_{e1} = \frac{T_{a1}}{N_e} = 5,0$ μs et fréquence d'échantillonnage $f_{e1} = \frac{N_e}{T_{a1}} = 0,20$ MHz.

c) La fréquence apparente est $f_{app1} = \frac{1}{2 \times 0,0050} = 0,10$ kHz.

2°) a) Fréquences apparentes $f_{app2} = \frac{1}{2,5 \times 2,0 \cdot 10^{-6}} = 0,20$ MHz = f_{app3}

b) Les fréquences d'échantillonnage sont $f_{e2} = \frac{N_e}{10 \times 2,0 \cdot 10^{-6}} = 0,50$ GHz et $f_{e3} = \frac{N_e}{10 \times 1,0 \cdot 10^{-6}} = 1,0$ GHz

c) Puisque la fréquence apparente ne change plus entre les deux dernières expériences, c'est que l'on mesure la bonne. Elle est donc $f_1 \approx 0,20$ MHz.

d) Le critère de Nyquist-Shannon est vérifié dans les deux derniers cas mais pas dans le premier, puisque $f_{e3} > f_{e2} > 2f_1 \approx 0,4$ MHz $> f_{e1}$

3°) a) La raie correspondant à la sinusoïde étudiée est à sa juste place puisque le critère de Shannon est respecté.

b) Le plus petit écart entre 2 raies successives est $\frac{1}{T_{a2}} = 50$ kHz. On ne peut pas connaître la fréquence f_1 avec 4 chiffres significatifs car on aurait besoin d'une précision à 100 Hz près, ce qui n'est pas le cas.

4°) La raie correspondant à la sinusoïde étudiée n'est pas à sa juste place puisque le critère de Shannon n'est plus respecté.

La fréquence fantôme observée peut être $f_{e1} - f_1$ ou $f_1 - f_{e1}$, puisque f_{e1} et f_1 sont proches l'une de l'autre.

5°) a) La fonction de transfert en régime harmonique est $\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$.

On remarque qu'en basse fréquence, le module de la fonction de transfert tend vers 0. En revanche, en haute fréquence, il tend vers 1. C'est donc un filtre passe-haut (même d'ordre 1).

b) L'équation différentielle est : $s(t) + \tau \frac{ds}{dt}(t) = \tau \frac{de}{dt}(t)$. D'où, avec la méthode d'Euler,

$$s_n + \tau \frac{s_{n+1} - s_n}{T_e} = \tau \frac{e_{n+1} - e_n}{T_e}, \text{ puis } s_{n+1} = s_n + e_{n+1} - e_n - \frac{T_e}{\tau} s_n.$$

Pb n°3 : Diffusion Thermique

1. Équation de la chaleur

1.1 Par analyse dimensionnelle, $[J_Q] = \frac{[\text{Puissance}]}{[L]} = [\lambda] \frac{[\theta]}{[L]}$ donc $[\lambda] = \frac{[\text{Puissance}]}{[L\theta]}$ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1.2. Puisqu'il n'y a pas de terme de création ici, le premier principe de la thermodynamique appliqué à la tranche pendant dt donne : (variation de l'énergie interne de la tranche d'épaisseur dx pendant dt) = (Énergie qui entre en x) - (énergie qui sort

en $x + dx$). La tranche de taille mésoscopique ayant une énergie interne $\delta U = \mu c S dx T$, à x fixé dans la tranche et pendant la durée dt , sa variation d'énergie interne vaut $d(\delta U) = \mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$,

d'où $d(\delta U) = S dx \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = [J_{Qx} S]_x - [J_{Qx} S]_{x+dx}$ ou encore $-S \frac{\partial J_{Qx}}{\partial x} = S \mu c \frac{\partial T}{\partial t}$. En simplifiant par $S dx$, il vient :

$$\frac{\partial J_{Qx}}{\partial x}(x, t) + \mu c \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = 0$$

1.3. Si l'on remplace maintenant l'expression de la loi locale de Fourier dans l'équation de conservation à une dimension, il vient : $\frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$ appelée pour des raisons historiques **équation de la « chaleur »**.

$$D = \frac{\lambda}{\mu c} \text{ en } \boxed{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$$

2. Contact avec deux sources de chaleur idéales

2.1. En régime permanent, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ alors $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$, d'où $T(x) = Ax + B$. Comme $T(0) = B = T_0$ et $T(L) = AL + B = T_a$, il

vient $T(x) = \frac{T_a - T_0}{L} x + T_0$ et $\Phi = J_Q a e = -\lambda \frac{T_a - T_0}{L} a e$.

2.2. L'équivalent de Φ est l'intensité du courant qui est le flux de charges. L'équivalent de T est V donc

$$R_{th} = \frac{T_0 - T_a}{\Phi_0 - a} = \frac{L}{\lambda a e} \text{ en } \boxed{\text{K} \cdot \text{W}^{-1}}$$

3. Transfert conducto-convectif

3.1. $[h] = \frac{[\text{Puissance}]}{[L][\theta]}$ donc h est en $\boxed{\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}}$. Par analogie au cas précédent, $R_C = \frac{T - T_a}{P} = \frac{1}{hS}$

3.2.

- $[\delta^2] = \frac{[\text{Puissance}]}{[L\theta]} \frac{[L][L^2][\theta]}{[\text{Puissance}]} = [L^2]$: δ est une longueur caractéristique, en m.
- On applique à nouveau le premier principe à la tranche dx : (variation de l'énergie interne de la tranche d'épaisseur dx pendant dt) = (énergie qui entre en x) - (énergie qui sort en $x + dx$) - (énergie qui sort latéralement par conducto-convexion). En régime permanent, le membre de gauche est nul, d'où : $0 = ae[J_{Qx}]_x - [J_{Qx}]_{x+dx} - 2h(T - T_a)adx$ puis $ae \frac{dJ_{Qx}}{dx} + 2h(T(x) - T_a)a = 0$. (La surface latérale est $2(a + e)dx \approx 2a dx$).

Si l'on remplace maintenant l'expression de la loi locale de Fourier, il vient :

$$-e\lambda \frac{d^2 T}{dx^2}(x) + 2h(T(x) - T_a) = 0 \text{ soit } \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{2h}{e\lambda} \theta = 0, \text{ ou encore } \boxed{\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{\theta}{\delta^2} = 0}$$

- La solution est de la forme : $\theta(x) = A \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{x}{\delta}\right)$. Comme $\theta(0) = A + B = T_0 - T_a$ et $\theta(L) = A \exp\left(-\frac{L}{\delta}\right) + B \exp\left(\frac{L}{\delta}\right) = 0$, il vient $A = -B \exp\left(2\frac{L}{\delta}\right)$ soit $B\left(1 - \exp\left(2\frac{L}{\delta}\right)\right) = T_0 - T_a$:

$$B = \frac{T_0 - T_a}{1 - \exp\left(2\frac{L}{\delta}\right)} \text{ et } A = -\frac{\exp\left(2\frac{L}{\delta}\right)(T_0 - T_a)}{1 - \exp\left(2\frac{L}{\delta}\right)}$$

$$\theta(x) = \frac{T_0 - T_a}{1 - \exp\left(2\frac{L}{\delta}\right)} \left(-\exp\left(2\frac{L}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) \right) \text{ ou } \theta(x) = (T_0 - T_a) \frac{\text{sh}\left(\frac{L-x}{\delta}\right)}{\text{sh}\left(\frac{L}{\delta}\right)}$$

- Quand $L \gg \delta$ (barre très longue), $\theta(x) \approx (T_0 - T_a) \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$.

4. Application : comportement thermique d'un transistor de puissance

4.1. En régime permanent, le système est équivalent à deux résistances thermiques en série :

$$T - T_a = (R + R_{rad})\Phi \text{ d'où } R_{rad} = \frac{T - T_a}{\Phi} - R$$

4.2. Numériquement, $R_{rad} = \frac{140 - 20}{40} - 0,5 = 2,5 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. (ou °C · W⁻¹). L'abscisse sur le graphe donne $\boxed{60 \text{ mm}}$.

5. Analyse en régime transitoire

5.1. Pour le système constitué du transistor, premier principe de la thermodynamique donne

$$dU = C dT = \left(\Phi - \frac{T - T_R}{R} \right) dt \text{ soit } C \frac{dT}{dt} = \Phi - \frac{T - T_R}{R} \quad (1)$$

Pour le système constitué du radiateur, $dU = C_R dT_R = \left(\begin{matrix} \text{Puissance reçue} \\ -\left(\frac{T_R - T_a}{R_{rad}}\right) + \left(\frac{T - T_R}{R}\right) \\ \text{puissance} \\ \text{cédée} \\ \text{à l'extérieur} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{puissance} \\ \text{reçue} \\ \text{du transistor} \end{matrix} \right) dt$ donc $C_R \frac{dT_R}{dt} = -\frac{(T_R - T_a)}{R_{rad}} + \frac{(T - T_R)}{R}$ (2)

5.2. Comme $\Phi \Leftrightarrow I$, $C \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow C \frac{dU_c}{dt}$ courant dans un condensateur, les équations précédentes sont équivalentes à la loi des nœuds en électricité en deux "nœuds" aux températures T et T_R , la "masse" étant la température T_a . Au premier nœud, les courants

viennent d'une "source idéale de courant" Φ , d'un condensateur de capacité $C_1 = C$ et d'une résistance $R_1 = R$. Au second, les courants viennent d'un "condensateur" $C_2 = C_R$ et de 2 résistances $R_2 = R_{rad}$ et $R_1 = R$. D'où le schéma équivalent.

5.3. Nous allons utiliser la notion d'impédances et simplifier le montage : L'"impédance" équivalente entre T et T_a . Nous avons

$$Y_2 = \frac{1}{R_2} + jC_2\omega \text{ soit } Y_{eq} = jC_1\omega + \frac{1}{R_1 + \frac{R_2}{1+jR_2C_2\omega}} = jC_1\omega + \frac{1+jR_2C_2\omega}{R_1+R_2+jR_1R_2C_2\omega}$$

$$Y_{eq} = \frac{1+j\omega(R_2C_2+R_1C_1+R_2C_1)-R_1R_2C_2C_1\omega^2}{R_1+R_2+jR_1R_2C_2\omega} \text{ alors } \Phi = Y_{eq}(T - T_a)$$

La fonction de transfert électrique est $H = \frac{1}{Y_{eq}} = \frac{R_1+R_2+jR_1R_2C_2\omega}{1+j\omega(R_2C_2+R_1C_1+R_2C_1)-R_1R_2C_2C_1\omega^2}$

et son analogue thermique est $H = \frac{R+R_{rad}+jRR_{rad}C_R\omega}{1+j\omega(R_{rad}C_R+RC+R_{rad}C)-RR_{rad}C_RC\omega^2}$

5.4. Si $RR_{rad}C_RC\omega^2 \ll 1$, $H = \frac{T-T_a}{\Phi} = \frac{R+R_{rad}+jRR_{rad}C_R\omega}{1+j\omega(R_{rad}C_R+RC+R_{rad}C)}$ ce qui donne un système d'ordre 1 avec une constante de temps

$$\tau = R_{rad}C_R + RC + R_{rad}C = 2.5(200) + 0.5(100) + 2.5(100) = 8,0.10^2s.$$