CORRIGÉ DU DM4 (SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS)

Problème 1 *Sujet inspiré CCINP MP*

1. Le cours donne les implications suivantes :

1. $[\sum f_n$ converge uniformément sur $I] \overset{\text{Théorème 15}}{\Leftarrow} [\sum f_n$ converge normalement sur $I]$

2. $[\sum f_n$ converge uniformément sur $I] \overset{\text{Proposition 10}}{\Rightarrow} [\sum f_n$ converge simplement sur $I]$

3. $[\sum f_n$ converge absolument sur $I] \overset{\text{Proposition 14}}{\Leftarrow} [\sum f_n$ converge normalement sur $I]$

4. $[\sum f_n$ converge absolument sur $I] \Rightarrow [\sum f_n$ converge simplement sur $I]$

   par le Théorème 14 du cours SÉRIES NUMÉRIQUES en travaillant avec $x \in I$ quelconque fixé.

2.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a par inégalité triangulaire :

$$|f_n(x)| \leqslant \left|\frac{\cos(nx)}{2^n}\right| + \left|\frac{\sin(nx)}{3^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \text{ (ne dépend pas de } x\text{).}$$

On en déduit que $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ est un majorant de l'ensemble $\{|f_n(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ et $\|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ est le plus petit majorant de cet ensemble.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$.
De plus, les séries géométriques $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ convergent car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$. Par linéarité, on obtient que la série $\sum \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ converge.
Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum \|f_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge ce qui signifie que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
En utilisant les résultats établis à la question 1, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum f_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\text{donc elle converge aussi uniformément, absolument et simplement sur } \mathbb{R}.}$$

2.(b) Considérons le cas $x = 0$.
La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(0) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc la série $\sum f_n$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
En utilisant les résultats établis à la question 1, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum f_n \text{ ne converge pas simplement sur } \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\text{donc elle ne converge ni absolument, ni uniformément, ni normalement sur } \mathbb{R}.}$$

3.(a) Soit $x \in [0,1]$.
La série numérique $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est une série alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x^2+n}{n^2} \geqslant 0$.

La suite $\left(\dfrac{x^2}{n^2}+\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et elle converge vers 0.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge simplement sur } [0,1].}$$

3.(b) Soit $x\in[0,1]$. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|f_n(x)|=\dfrac{x^2}{n^2}+\dfrac{1}{n}$.
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2>1$ et constante multiplicative) mais la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc par somme, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}|f_n(x)|$ diverge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) \text{ ne converge absolument en aucune valeur } x \text{ de } [0,1].}$$

3.(c) Soit $x\in[0,1]$. Par le critère spécial des séries alternées (dont les hypothèses ont été vérifiées en 3.(a)), on obtient également pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|\leqslant|f_{n+1}(x)|=\frac{x^2}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}\text{ (ne dépend pas de } x).$$

Ainsi, $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}$ est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x)|, x\in[0,1]\}$.
Comme $\|R_n\|_\infty^{[0,1]}$ est le plus petit majorant de cet ensemble, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$0\leqslant\|R_n\|_\infty^{[0,1]}\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}\right)=0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|R_n\|_\infty^{[0,1]}=0$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty}\|R_n-\varphi\|_\infty^{[0,1]}=0$ en notant $\varphi : x\mapsto 0$.
On a ainsi prouvé que la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $\varphi : x\mapsto 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge uniformément sur } [0,1].}$$

4.(a) Soit $x\in]-1,1[$. La suite géométrique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 car $|x|<1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur }]-1,1[\text{ vers la fonction } \varphi : x\mapsto 0.}$$

4.(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a par définition, $\|f_n-\varphi\|_\infty^{]-1,1[}=\operatorname*{Sup}\limits_{x\in]-1,1[}|f_n(x)-\varphi(x)|=\operatorname*{Sup}\limits_{x\in]-1,1[}|x|^n$.
Comme la fonction $x\mapsto|x|^n$ est paire, on a $\|f_n-\varphi\|_\infty^{]-1,1[}=\operatorname*{Sup}\limits_{x\in[0,1[}x^n$.
Comme la fonction $x\mapsto x^n$ est croissante sur $[0,1[$, on en déduit (théorème de la limite monotone) que $\|f_n-\varphi\|_\infty^{]-1,1[}=\lim\limits_{x\to1^-}x^n=1$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n-\varphi\|_\infty^{]-1,1[}=\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$.
Comme la suite $(\|f_n-\varphi\|_\infty^{]-1,1[})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, on en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$ vers la fonction $\varphi : x\mapsto 0$ et donc :

$$\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément sur }]-1,1[.}$$

4.(c) Soit $x \in]-1,1[$. La série $\sum |f_n(x)| = \sum |x|^n$ converge (série géométrique de raison $|x| \in]-1,1[$).
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge absolument sur }]-1,1[.}$$

5. La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_1$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (\alpha_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bornée.}}$$

Soit $x \in I$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \alpha_n x^n(1-x) \leqslant \alpha_1 x^n.$$

La série $\sum x^n$ converge (série géométrique de raison $x \in]-1,1[$).
Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum f_n(x)$ converge.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } I.}$$

6.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| = f_n(x)$ puisque $\alpha_n x^n(1-x) \geqslant 0$.
La fonction f_n est dérivable sur I et on a pour tout $x \in I$:

$$f_n'(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1)) \text{ du signe de } n - x(n+1).$$

La fonction f_n est donc croissante sur $\left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{n}{n+1}, 1\right[$.
On en déduit qu'elle admet sur I un maximum atteint en $\dfrac{n}{n+1}$ qui vaut $f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.
Ainsi :

$$\boxed{\|f_n\|_\infty^I = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.}$$

6.(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\|f_n\|_\infty^I = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{\alpha_n}{n+1} e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-1}$ par continuité de la fonction exponentielle.
Comme $e^{-1} \neq 0$, on a donc $e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} \sim e^{-1}$ et donc $\|f_n\|_\infty^I \sim \dfrac{\alpha_n}{ne}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty^I \geqslant 0$.
Par comparaison, on en déduit que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty^I$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{ne}$ sont de même nature.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge normalement sur } I \text{ si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha_n}{n} \text{ converge.}}$$

7.(a) Soit $x \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geqslant n+1$.
Comme $x \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{N} x^k = \frac{x^{n+1} - x^{N+1}}{1-x}.$$

Comme $x \in]-1,1[$, on obtient par passage à la limite :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.}$$

7.(b) On suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
D'après la question 5., la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I. Montrons que la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.
Soit $x \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante donc pour tout $k \geqslant n+1$, on a $\alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$ donc comme $x^k(1-x) \geqslant 0$, on a :

$$\alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)x^k.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant n+1$. Par croissance (les séries en jeu sont convergentes), on obtient :

$$0 \leqslant R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1}x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1} \text{ (ne dépend pas de } x).$$

Ainsi, α_{n+1} est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x)|, x \in I\}$.
Comme $\|R_n\|_\infty^I$ est le plus petit majorant de cet ensemble, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \|R_n\|_\infty^I \leqslant \alpha_{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{n+1} = 0$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^I = 0$.
On a donc prouvé que la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si la suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0 alors la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I.}$$

7.(c) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel ℓ positif et on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k \geqslant \ell$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$. On a alors par croissance (les séries en jeu convergent) :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \geqslant \ell(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \ell x^{n+1}.$$

On a également $R_n(x) \leqslant \|R_n\|_\infty^I$ (car c'est un majorant).
On en déduit que $\ell x^{n+1} \leqslant \|R_n\|_\infty^I$ (ne dépend pas de x).
Ainsi, $\|R_n\|_\infty^I$ est un majorant de l'ensemble $\{\ell x^{n+1}, x \in I\}$ donc $\operatorname{Sup}\limits_{x\in I} \ell x^{n+1} \leqslant \|R_n\|_\infty^I$.
Or, la fonction $x \mapsto \ell x^{n+1}$ est croissante sur $I = [0,1[$ donc $\operatorname{Sup}\limits_{x\in I} \ell x^{n+1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \ell x^{n+1} = \ell$.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ell \leqslant \|R_n\|_\infty^I$.
Comme la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^I = 0$ et on en déduit par passage à la limite que $\ell = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ alors la suite } (\alpha_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers 0.}}$$

8.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$.
La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive.
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n} = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$) donc d'après la question 6.(b), la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I.

$$\boxed{\text{Si pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha = \frac{1}{n} \text{ alors la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge normalement sur } I.}$$

8.(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = 1$.
La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive.
Comme elle ne converge pas vers 0, d'après 7.(c), la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

$$\boxed{\text{Si pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha = 1 \text{ alors la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ ne converge pas uniformément sur } I.}$$

8.(c) On pose $\alpha_1 = \dfrac{1}{\ln 2}$ et pour tout $n \geqslant 2$, $\alpha_n = \dfrac{1}{\ln n}$.
La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive.
Elle converge vers 0 donc d'après 7.(b), la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n} = \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. On a alors $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k\ln k}$.
Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 3$. En sommant pour k allant de 2 à $N-1$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k\ln k} \geqslant \int_2^N \frac{1}{t\ln t}\, dt = [\ln|\ln t|]_2^N = \ln(\ln N) - \ln(\ln 2)$$

d'où :

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k\ln k} \geqslant \frac{1}{N\ln N} + \ln(\ln N) - \ln(\ln 2).$$

Comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{N\ln N} + \ln(\ln N) - \ln(\ln 2)\right) = +\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k\ln k} = +\infty$ par inégalité.
Ainsi, la série $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge.
On en déduit par 6.(b) que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur I.

$$\boxed{\text{Si } \alpha_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geqslant 2,\ \alpha_n = \frac{1}{\ln n} \text{ alors la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ mais elle ne converge pas normalement sur } I.}$$

9.(a) $\boxed{\text{La convergence uniforme n'implique pas la convergence normale.}}$
Contre-exemple : La série définie à la question 8.(c) converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.
On a également la série définie à la question 3 : elle converge uniformément sur $[0, 1]$ d'après 3.(c) mais elle ne converge pas normalement sur $[0, 1]$ d'après 3.(b) (puisque sinon elle convergerait absolument sur $[0, 1]$).

9.(b) $\boxed{\text{La convergence simple n'implique pas la convergence uniforme.}}$
Contre-exemple : La série définie à la question 8.(b) converge simplement sur I (d'après la question 5) mais ne converge pas uniformément sur I.
On a également la série définie à la question 4 : elle converge simplement sur $]-1, 1[$ d'après 4.(c) (puisqu'elle converge absolument sur $]-1, 1[$) mais elle ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$ d'après 4.(b) (car sinon la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait uniformément sur $]-1, 1[$).

9.(c) $\boxed{\text{La convergence absolue n'implique pas la convergence normale.}}$
Contre-exemple : La série définie à la question 4 converge absolument sur $]-1, 1[$ (d'après 4.(c))

mais ne converge pas normalement sur $]-1,1[$ (car elle ne converge pas uniformément d'après 4.(b) puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$).

9.(d) $\boxed{\text{La convergence simple n'implique pas la convergence absolue.}}$
Contre-exemple : La série définie à la question 3 converge simplement sur $[0,1]$ (d'après 3.(a)) mais ne converge pas absolument sur $[0,1]$ (d'après 3.(b)).

10. $\boxed{\text{La convergence uniforme n'implique pas la convergence absolue.}}$
Contre-exemple : La série définie à la question 3 converge uniformément sur $[0,1]$ (d'après 3.(c)) mais ne converge pas absolument sur $[0,1]$ (d'après 3.(b)).
$\boxed{\text{La convergence absolue n'implique pas la convergence uniforme.}}$
Contre-exemple : La série définie à la question 4 converge absolument sur $]-1,1[$ (d'après 4.(c)) mais ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$ (d'après 4.(b)).

Problème 2 *(École de l'air PC 2003)*
1.(a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $v_n>0$ et :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\frac{2n+1}{2(n+1)}=\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{n(n+1)}}\geqslant 1$$

car $\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=n^2+n+\frac{1}{4}\geqslant\sqrt{n^2+n}^{\,2}$ avec $n+\frac{1}{2}\geqslant 0$ et $\sqrt{n(n+1)}>0$.
On a donc $v_{n+1}\geqslant v_n$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

1.(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
w_n=\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)&=\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\\
&=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&=\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{8n^2}.
\end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{8n^2}\geqslant 0$ et la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge $(2>1)$.
Par comparaison, on en déduit :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} w_n \text{ converge.}}$$

1.(c) La série télescopique $\sum w_n=\sum\big(\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)\big)$ converge donc la suite $\big(\ln(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel α.
Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$\boxed{\text{la suite } \big(v_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } L=e^{\alpha}.}$$

Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n\leqslant L$ donc $u_n\leqslant\dfrac{L}{\sqrt{n}}$.

Notons de plus qu'on a $v_n\sim L$ car $L\neq 0$. Par suite, $u_n\sim\dfrac{L}{\sqrt{n}}$.

$$\boxed{\text{On a pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \tfrac{L}{\sqrt{n}} \text{ et de plus, } u_n \sim \tfrac{L}{\sqrt{n}}.}$$

2.(a) La fonction $x\mapsto 1-x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction racine carrée est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, on en déduit que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$.
On a pour tout $x\in[0,1[$:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}\ ,\ \ \varphi''(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}\ ;\ \ \varphi^{(3)}(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}(1-x)^{-5/2}\ ,\ \ \varphi^{(4)}(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}(1-x)^{-7/2}$$

Par récurrence immédiate, on montre que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(x) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-3}{2}(1-x)^{-(2n-1)/2} = -\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2}(1-x)^{-(2n-1)/2}\\ &= -\frac{(n-1)!}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2k}(1-x)^{-(2n-1)/2} = -\frac{(n-1)!u_{n-1}}{2}(1-x)^{-(2n-1)/2}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x\in[0,1[,\ \varphi'(x) = -\tfrac{1}{2}(1-x)^{-1/2} \text{ et pour tout } n\geqslant 2,\ \varphi^{(n)}(x) = -\tfrac{(n-1)!u_{n-1}}{2}(1-x)^{-(2n-1)/2}.}$$

2.(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Notons $a_0,\dots,a_n$ les cœfficients de P_n.
On a pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $a_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$ donc $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$ et pour tout $k\geqslant 2$, $a_k = -\frac{(k-1)!u_{k-1}}{2(k!)} = -\frac{u_{k-1}}{2k}$.

$$\boxed{\text{On a } a_0 = 1,\ a_1 = -\tfrac{1}{2} \text{ et pour tout } k\in[\![2,n]\!],\ a_k = -\tfrac{u_{k-1}}{2k}.}$$

On obtient par le calcul :

$$\boxed{P_4 = 1-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{u_1}{4}x^2-\tfrac{u_2}{6}x^3-\tfrac{u_3}{8}x^4 = 1-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2-\tfrac{1}{16}x^3-\tfrac{5}{128}x^4.}$$

2.(c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x\in[0,1[$.
On a $R_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n\varphi^{(n+1)}(t)dt = -\dfrac{u_n}{2}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n(1-t)^{-(2n+1)/2}dt.$
On a pour tout $t\in[0,x]$:

$$0\leqslant (x-t)^n(1-t)^{-(2n+1)/2}\leqslant (1-t)^n(1-t)^{-(2n+1)/2} = (1-t)^{-1/2}.$$

Par croissance de l'intégrale (avec $0\leqslant x$), on en déduit :

$$0\leqslant \int_0^x (x-t)^n(1-t)^{-(2n+1)/2}dt\leqslant \int_0^x (1-t)^{-1/2}dt.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x\in[0,1[,\ |R_n(x)| = \frac{u_n}{2}\int_0^x (x-t)^n(1-t)^{-(2n+1)/2}dt\leqslant \frac{u_n}{2}\int_0^x (1-t)^{-1/2}dt.}$$

On a :

$$\int_0^x (1-t)^{-1/2}dt = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x = 2(1-\sqrt{1-x})\leqslant 2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x\in[0,1[,\ |R_n(x)|\leqslant u_n.}$$

2.(d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Les fonctions φ et P_n sont continues en 1 donc la fonction $R_n = \varphi - P_n$ est prolongeable par continuité en 1.
En passant à la limite $x\to 1$ dans l'inégalité précédente, on obtient $|R_n(1)|\leqslant u_n$.
On a donc pour tout $x\in[0,1]$, $|R_n(x)|\leqslant u_n$.

Comme u_n ne dépend pas de x, on en déduit que u_n est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x)|,\ x \in [0,1]\}$.
Puisque $\|R_n\|_\infty^{[0,1]}$ est le plus petit de ses majorants, on en déduit $\|R_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant u_n$.
On a ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \|R_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant u_n$.
On a d'après 1.(c), $u_n \sim \frac{L}{\sqrt{n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
On en déduit par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^{[0,1]} = \lim_{n\to+\infty} \|P_n - \varphi\|_\infty^{[0,1]} = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite de fonctions polynômiales } (P_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers la fonction } \varphi.}$$

2.(e) Notons qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $y \in [0,1]$:

$$|\varphi(y) - P_n(y)| = |R_n(y)| \leqslant \|R_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant u_n \leqslant \frac{L}{\sqrt{n}}.$$

Soit N un entier vérifiant $N \geqslant \dfrac{L^2M^2}{\varepsilon^2}$.
On a $\frac{L}{\sqrt{N}} \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$ donc pour tout $y \in [0,1]$, on a $|\varphi(y) - P_N(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$.
Soit $x \in [-1,1]$. En appliquant cette inégalité à $y = 1 - x^2 \in [0,1]$, comme $\varphi(1-x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$ et $P_N(1-x^2) = Q_N(x)$, on obtient $\big||x| - Q_N(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$.

$$\boxed{\text{Si } N \text{ vérifie } N \geqslant \frac{L^2M^2}{\varepsilon^2} \text{ alors pour tout } x \in [-1,1], \text{ on a } \big||x| - Q_N(x)\big| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{M}.}$$

3.(a) Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
La fonction g est affine sur l'intervalle $[k/n, (k+1)/n]$.
Ainsi, il existe deux réels α et β tels que pour tout $x \in [k/n, (k+1)/n]$, $g(x) = \alpha x + \beta$.
On a $g\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $g\left(\frac{k+1}{n}\right) = f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
Les réels α et β vérifient donc $f\left(\frac{k}{n}\right) = \alpha\frac{k}{n} + \beta$ (1) et $f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \alpha\frac{k+1}{n} + \beta$ (2).
(2)-(1) donne $\frac{\alpha}{n} = f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$ d'où $\alpha = n\Big(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\Big)$.
Par suite, $\beta = f\left(\frac{k}{n}\right) - n\Big(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\Big)\frac{k}{n} = (1+k)f\left(\frac{k}{n}\right) - kf\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{lorsque } \tfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \tfrac{k+1}{n}, \text{ on a } g(x) = n\Big(f\left(\tfrac{k+1}{n}\right) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\Big)x + (1+k)f\left(\tfrac{k}{n}\right) - kf\left(\tfrac{k+1}{n}\right) = (1+k-nx)f\left(\tfrac{k}{n}\right) + (nx-k)f\left(\tfrac{k+1}{n}\right).}$$

3.(b) Soit $x \in [0,1]$.
Si nx est un entier alors $g(x) = f(x)$ donc on a $|g(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$.
On suppose désormais que nx n'est pas un entier et on pose $k = \lfloor nx \rfloor$.
L'entier k vérifie $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et on a $\frac{k}{n} < x < \frac{k+1}{n}$.
On a alors d'après la question précédente, $g(x) = (1+k-nx)f\left(\frac{k}{n}\right) + (nx-k)f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
On constate par ailleurs que $f(x) = (1+k-nx)f(x) + (nx-k)f(x)$.
Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
|g(x) - f(x)| &= \left|(1+k-nx)\Big(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\Big) + (nx-k)\Big(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f(x)\Big)\right| \\
&\leqslant (1+k-nx)\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| + (nx-k)\left|f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f(x)\right| \\
&< (1+k-nx)\varepsilon + (nx-k)\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

car $|x - \frac{k}{n}| < \frac{1}{n}$ et $|x - \frac{k+1}{n}| < \frac{1}{n}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1],\ |g(x) - f(x)| < \varepsilon.}$$

4.(a) Soit $(g,h) \in E_{n+1}^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\Phi(ag+h) = \left((ag+h)\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{0\leqslant k\leqslant n} = \left(ag\left(\frac{k}{n}\right) + h\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{0\leqslant k\leqslant n} = a\left(g\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{0\leqslant k\leqslant n} + \left(h\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{0\leqslant k\leqslant n} = a\Phi(g)+\Phi(h).$$

Donc l'application Φ est linéaire.
De plus, il est clair qu'une fonction g de E_{n+1} est entièrement caractérisée par les valeurs qu'elle prend aux points $\frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ donc Φ est bijective.
Plus précisément, soit $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
L'unique antécédent de α par Φ est la fonction g_α définie sur $[k/n,(k+1)/n]$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$ par :

$$\forall x \in [k/n,(k+1)/n],\ \ g_\alpha(x) = n\Big(a_{k+1} - a_k\Big)x + (1+k)a_k - k a_{k+1} = (1+k-nx)a_k + (nx-k)a_{k+1}$$

(même preuve qu'à la question 3.).
On a encore $g_\alpha(1) = a_n$ et pour tout $x \in [0,1[$:

$$g_\alpha(x) = (1 + \lfloor nx \rfloor - nx)a_{\lfloor nx \rfloor} + (nx - \lfloor nx \rfloor)a_{\lfloor nx \rfloor + 1}.$$

Φ est un isomorphisme et l'unique fonction $g_\alpha \in E_{n+1}$ telle que $\Phi(g_\alpha) = \alpha$ où $\alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ est la fonction définie sur $[0,1]$ par $g_\alpha(1) = a_n$ et pour tout $x \in [0,1[$:
$$g_\alpha(x) = (1 + \lfloor nx \rfloor - nx)a_{\lfloor nx \rfloor} + (nx - \lfloor nx \rfloor)a_{\lfloor nx \rfloor + 1}.$$

4.(b) Comme Φ est un isomorphisme, la famille $(f_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de E_{n+1} si et seulement si la famille $\big(\Phi(f_j)\big)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$.
De plus, la famille $\big(\Phi(f_j)\big)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ si et seulement si la matrice M de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est inversible.
Pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, la $i$ème coordonnée de $\Phi(f_j)$ dans la base canonique est $f_j\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{|i-j|}{n}$.
On en déduit que $M = \frac{1}{n}A_{n+1}$.
On sait que la matrice A_{n+1} est inversible donc M est inversible.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la famille } (f_j)_{0\leqslant j\leqslant n} \text{ est une base de } E_{n+1}.}$$

4.(c) La famille $(f_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de E_{n+1} et $g_\alpha \in E_{n+1}$ donc :

$$\boxed{\text{il existe } n+1 \text{ réels } \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ tels que } g_\alpha = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \text{ c'est-à-dire } \forall x \in [0,1],\ g_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x).}$$

On a alors en appliquant l'application linéaire Φ :

$$\Phi(g_\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \Phi(f_k)$$

puis en prenant les vecteurs-coordonnées dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n} A_{n+1} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Comme $B_{n+1} = A_{n+1}^{-1}$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = nB_{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_0 = \frac{1-n}{2}a_0 + \frac{n}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_n \\ \lambda_k = \frac{n}{2}a_{k-1} - na_k + \frac{n}{2}a_{k+1} \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \\ \lambda_n = \frac{1}{2}a_0 + \frac{n}{2}a_{n-1} + \frac{1-n}{2}a_n \end{cases}}$$

5.(a) La fonction g définie à la question 3.a) est la fonction g_α pour :

$$\boxed{\alpha = \left(f(0), f\left(\tfrac{1}{n}\right), f\left(\tfrac{2}{n}\right), \dots, f\left(\tfrac{n-1}{n}\right), f(1)\right).}$$

On obtient donc avec l'expression obtenue en 4.c) :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \lambda_k = \tfrac{n}{2}f\left(\tfrac{k-1}{n}\right) - nf\left(\tfrac{k}{n}\right) + \tfrac{n}{2}f\left(\tfrac{k+1}{n}\right).}$$

5.(b) Soit $x \in [0,1]$. En appliquant 3.(b) puis 2.(e), on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - R(x)| &\leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - R(x)| \leqslant \varepsilon + \left|g_\alpha(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_N\left(x - \frac{k}{n}\right)\right| \\ &\leqslant \varepsilon + \left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(f_k(x) - Q_N\left(x - \frac{k}{n}\right)\right)\right| \leqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \left|\left|x - \frac{k}{n}\right| - Q_N\left(x - \frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon + \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \frac{\varepsilon}{M} \leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

car pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $x - \dfrac{k}{n} \in [-1, 1]$.
Ainsi :

$$\boxed{\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - R(x)| \leqslant 2\varepsilon.}$$

5.(c) On a ainsi montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynômiale R telle que $\|f - R\|_\infty^{[0,1]} \leqslant 2\varepsilon$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$, il existe une fonction polynômiale R_n telle que $0 \leqslant \|f - R_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant \frac{2}{n}$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f - R_n\|_\infty^{[0,1]} = 0$.
Donc la suite polynômiale $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction f.

Ainsi, il existe une suite (R_n) de fonctions polynômiales convergeant uniformément vers f sur $[0,1]$. On a ainsi prouvé le théorème de Weierstrass et on a même déterminé explicitement une telle suite.

6. En faisant les opérations de l'énoncé, on obtient :

$$\det(A_{n+1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -2 & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

On remplace alors la colonne C_1 par la colonne $C_1 + C_{n+1}$, on obtient le déterminant d'une matrice triangulaire :

$$\det(A_{n+1}) = \begin{vmatrix} n & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n n 2^{n-1}.$$

On a $\det(A_{n+1}) = (-1)^n n 2^{n-1} \neq 0$ donc la matrice A_{n+1} est inversible.