Chapitre 10

Les nombres réels

1 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

Définition 1.1 (Bornes supérieure et inférieure)

Soit $X \subset \mathbb{R}$ non vide.

1. La *borne supérieure* de X, si elle existe, est le plus petit des majorants de X, *i.e.* un majorant $M \in \mathbb{R}$ de X tel que si M' est un majorant de X, on ait $M \leqslant M'$. On la note $\sup(X)$.

2. La *borne inférieure* de X, si elle existe, est le plus grand des minorants de X, *i.e.* un minorant $m \in \mathbb{R}$ de X tel que si m' est un minorant de X, on ait $m' \leqslant m$. On la note $\inf(X)$.

Remarque.

Un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$ n'admet pas nécessairement de borne supérieure ou inférieure.

Proposition 1.2

Soit $X \subset \mathbb{R}$.

1. Si X admet une borne supérieure, elle est unique.

2. Si X admet une borne inférieure, elle est unique.

Proposition 1.3

Soit $X \subset \mathbb{R}$.

1. L'ensemble X admet un maximum si et seulement s'il admet une borne supérieure et si $\sup(X) \in X$, et alors $\max(X) = \sup(X)$.

2. L'ensemble X admet un minimum si et seulement s'il admet une borne inférieure et si $\inf(X) \in X$, et alors $\min(X) = \inf(X)$.

Remarque.

On dit que le plus grand élément est une "borne supérieure atteinte".

Exemples.

1. Si $X =]-2, 3]$. Alors -2 est la borne inférieure de X et 3 la borne supérieure, mais également le plus grand élément.

2. Si $X = \mathbb{R}_+^*$, alors X n'admet pas de borne supérieure, et 0 est sa borne inférieure.

Théorème 1.4

1. Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

2. Tout sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Méthode 1.5 (Montrer qu'un réel est la borne supérieure/inférieure d'un ensemble)

Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

1. Soit $M \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $M = \sup(X)$, on montre que M est un majorant de X, et que si M' est un majorant de X, alors $M \leqslant M'$, ou que si $M' < M$, alors M' ne majore pas X.

2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour montrer que $m = \inf(X)$, on montre que m est un minorant de X, et que si m' est un minorant de X, alors $m \geqslant m'$, ou que si $m' > m$, alors m' ne minore pas X.

Méthode 1.6 (Montrer qu'un réel est la borne supérieure d'un ensemble)

On considère un ensemble non vide $X \subset \mathbb{R}$, et un réel M. On veut montrer que X admet une borne supérieure et que $\sup(X) = M$.

1. On montre que M majore X. Ceci prouve que X admet une borne supérieure.

2. On fixe $\varepsilon > 0$. On montre qu'il existe $x \in X$ tel que $M - \varepsilon < x$.

Méthode 1.7 (Montrer qu'un réel est la borne inférieure d'un ensemble)

On considère un ensemble non vide $X \subset \mathbb{R}$, et un réel m. On veut montrer que X admet une borne inférieure et que $\inf(X) = m$.

1. On montre que m minore X. Ceci prouve que X admet une borne inférieure.

2. On fixe $\varepsilon > 0$. On montre qu'il existe $x \in X$ tel que $x < m + \varepsilon$.

Méthode 1.8 (Montrer qu'un réel est la borne supérieure, avec les suites)

On considère un ensemble non vide $X \subset \mathbb{R}$, et un réel M. On veut montrer que X admet une borne supérieure et que $\sup(X) = M$.

1. On montre que M majore X. Ceci prouve que X admet une borne supérieure.

2. On montre qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

Ce résultat sera démontré dans le chapitre sur les suites.

Méthode 1.9 (Montrer qu'un réel est la borne inférieure, avec les suites)

On considère un ensemble non vide $X \subset \mathbb{R}$, et un réel m. On veut montrer que X admet une borne inférieure et que $\inf(X) = m$.

1. On montre que m minore X. Ceci prouve que X admet une borne inférieure.

2. On montre qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m$.

Ce résultat sera démontré dans le chapitre sur les suites.

Méthode 1.10 (Passage à la borne supérieure/inférieure)

Soit $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, et un réel y.

1. Si : $\forall\, x \in X,\ x \leqslant y$, alors $\sup(X) \leqslant y$. On dit alors qu'on "passe à la borne supérieure dans l'inégalité large".

2. Si : $\forall\, x \in X,\ y \leqslant x$, alors $y \leqslant \inf(X)$. On dit alors qu'on "passe à la borne inférieure dans l'inégalité large".

2 Droite numérique achevée

Définition 2.1

La *droite numérique achevée* est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ prolongée par

1. $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}},\ x \leqslant +\infty$.

2. $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}},\ -\infty \leqslant x$.

Proposition 2.2

On a :

1. $+\infty$ est le plus grand élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

2. $-\infty$ est le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 2.3

Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.4

Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Alors :

1. X est majoré si et seulement si $\sup(X) < +\infty$.

2. X est minoré si et seulement si $-\infty < \inf(X)$.

On prolonge partiellement les opérations algébriques de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$. On pose

1. $-\infty + y = -\infty$ pour tout $y \neq +\infty$.

2. $-\infty + \infty$ est indéterminé.

3. $+\infty + y = +\infty$ pou tout $y \neq -\infty$.

De même pour les produits. Seuls restent indéterminés les produits de 0 par $\pm\infty$.

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 3.1 (Intervalles de $\mathbb{R}$)

Un *intervalle* de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, a, b \in I,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b \Longrightarrow x \in I.$$

Remarque.

L'ensemble vide et les ensembles réduits à un point sont des intervalles, appelés *intervalles triviaux.*

On rappelle que pour $a \leqslant b$, on définit les ensembles

$$]a, b[, \quad [a, b[, \quad]a, b], \quad [a, b], \quad]-\infty, b[, \quad]-\infty, b], \quad]-\infty, +\infty[, \quad]a, +\infty[, \quad [a, +\infty[$$

par $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, etc...

Proposition 3.2

Les ensembles ci-dessus sont des intervalles.

Théorème 3.3

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $a = \inf(I)$, $b = \sup(I)$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$). Alors

$$I = \begin{cases} [a, b] & \text{si } a, b \in I \\ ]a, b] & \text{si } a \notin I,\ b \in I \\ [a\ , b[& \text{si } a \in I,\ b \notin I \\ ]a, b[& \text{si } a, b \notin I \end{cases}$$

4 Partie entière

Lemme 4.1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n > x$.

Remarque.

On démontre donc dans ce lemme que $\mathbb{Z}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.2 (Partie entière)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Il existe un unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leqslant x < p+1$. C'est la *partie entière* de x, et on la note $\lfloor x \rfloor$.

2. La partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, et $\lfloor x \rfloor + 1$ est le plus petit entier strictement plus grand que x.

Remarque.

On peut être tenté de faire cette démonstration (fausse !) : A est un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{Z}$. Il admet donc un plus grand élément, qui est justement $\lfloor x \rfloor$. Mais attention : *a priori*, A n'est pas majoré dans $\mathbb{Z}$, mais seulement dans $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. $\lfloor 2,34 \rfloor = 2$.

2. $\lfloor -5,45 \rfloor = -6$.

3. Attention : $\lfloor -x \rfloor \neq -\lfloor x \rfloor$. Par exemple, $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$ et $\lfloor 1,5 \rfloor = 1$.

Proposition 4.3 (Croissance)

La partie entière est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.4

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

1. $n \leqslant x \iff n \leqslant \lfloor x \rfloor$.

2. $x < n \iff \lfloor x \rfloor < n$.

3. $n \leqslant x < n+1 \iff n = \lfloor x \rfloor$.

Proposition 4.5

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

1. $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

2. $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Méthode 4.6 (Montrer qu'un entier est la partie entière d'un réel)

On considère $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On veut montrer que $n = \lfloor x \rfloor$.

1. Si ce n'est pas fait, on vérifie que $n \in \mathbb{Z}$.

2. On montre que $n \leqslant x$.

3. On montre que si $m \in \mathbb{Z}$ vérifie $m \leqslant x$, alors $m \leqslant n$. Ou on montre que $x < n+1$.

5 Approximation décimale des réels

Définition 5.1

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit les suites $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}, \quad e_n = \frac{1 + \lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = d_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le décimal d_n est *la valeur approchée par défaut à 10^{-n} près* de x, et e_n *la valeur approchée par excès à 10^{-n} près* de x.

Exemple.

$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$: valeurs approchées à 10^{-3} près.

Proposition 5.2

1. La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_n \leqslant x < e_n$.
4. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x.

Définition 5.3

Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ s'il rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Proposition 5.4

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} A \text{ dense dans } \mathbb{R} &\iff \forall\, x, y \in \mathbb{R} \mid x < y,\ A \cap\,]x, y[\neq \emptyset \\ &\iff \forall\, (x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ A \cap\,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\neq \emptyset \end{aligned}$$

Proposition 5.5

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

6 Compétences

1. Savoir déterminer la borne supérieure/inférieure d'un ensemble.
2. Connaître et reconnaître la caractérisation d'une borne supérieure.
3. Savoi utiliser la caractérisation de la partie entière.