

I. L'uranium source d'énergieI.A. L'uranium naturel

Q1. $[\lambda] = T^{-1}$

Q2. Bilan de noyaux entre t et $t+dt$: $N(t+dt) - N(t) =$ nombre de noyaux désintégrés pendant dt Or: probabilité de désintégration pendant $dt = \lambda dt =$ nombre de noyaux désintégrés pendant dt $N(t)$

donc: $N(t+dt) = N(t) - \lambda N(t) dt$

On en déduit: $\frac{N(t+dt) - N(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dt}(t) + \lambda N(t) = 0$

Q3. Solution: $N(t) = N(0) e^{-\lambda t}$

Par définition de $T_{1/2}$: $\frac{N(0)}{2} = N(0) e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow \ln 2 = \lambda T_{1/2} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

Q4. A.N: $\lambda_{238} = 4,9184 \cdot 10^{-18} s^{-1}$ $\lambda_{235} = 3,123 \cdot 10^{-17} s^{-1}$

Ces valeurs sont comparables à celle du Thorium

Q5. L'uranium 235 a une probabilité de désintégration par seconde supérieure à celle de l'uranium 238. Donc la proportion d'uranium 235 dans les minerais diminue au cours du temps

Q6. On connaît la proportion d'uranium 253 à même époque (instant t): 0,72 %
On suppose que l'instant $t=0$ est celui où la proportion d'uranium 235 était: 3%

$$t=0: N(0) \text{ atomes d'uranium } \begin{cases} N_{238}(0) = 97 \cdot 10^{-2} \cdot N(0) \\ N_{235}(0) = 3 \cdot 10^{-2} \cdot N(0) \end{cases}$$

$$t: N(t) \text{ atomes d'uranium } \begin{cases} N_{238}(t) = 99,28 \cdot 10^{-2} \cdot N(0) \\ N_{235}(t) = 0,72 \cdot 10^{-2} \cdot N(0) \end{cases}$$

On: $N_{238}(t) = N_{238}(0) e^{-\lambda_{238} t}$ et $N_{235}(t) = N_{235}(0) e^{-\lambda_{235} t}$

Donc: $\begin{cases} 99,28 \cdot 10^{-2} N(0) = 97 \cdot 10^{-2} N(0) e^{-\lambda_{238} t} \\ 0,72 \cdot 10^{-2} N(0) = 3 \cdot 10^{-2} N(0) e^{-\lambda_{235} t} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{99,28}{0,72} = \frac{97}{3} e^{-(\lambda_{238} - \lambda_{235}) t}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{3 \cdot 99,28}{0,72 \cdot 97}\right) = -(\lambda_{238} - \lambda_{235}) t \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{3 \cdot 99,28}{0,72 \cdot 97}\right)}{-(\lambda_{238} - \lambda_{235})}$$

A.N: $t = 5,51 \cdot 10^{16} s = 1,75 \cdot 10^9 \text{ années}$

Il y avait 3% d'uranium 235 dans le minerai il y a 1,75 milliards d'années.
L'âge de la Terre est 4,5 milliards d'années. La période a durée $4,5 - 1,75 = 2,75$ milliards d'années

Q7. Dans les 24 kg d'uranium, il y a: $N_{238} = \frac{24 \cdot 0,9928}{238,04 \cdot 10^{-3}} \cdot e_A = 6,03 \cdot 10^{25}$ atomes d'uranium 238

Parmi eux il y en a $\lambda_{238} \cdot N_{238} = 2,96 \cdot 10^8$ qui se désintègrent par seconde

L'énergie libérée par seconde est: $2,96 \cdot 10^8 \cdot 4,27 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,02 \cdot 10^{-4} \text{ J.s}^{-1} = P_1$

Dans les 24 kg d'uranium, il y a: $N_{235} = \frac{24 \cdot 0,72 \cdot 10^{-2}}{235,04 \cdot 10^{-3}} \cdot e_A = 4,42 \cdot 10^{23}$ atomes d'uranium 235

Parmi eux il y en a $\lambda_{235} \cdot N_{235} = 1,38 \cdot 10^7$ qui se désintègrent par seconde

L'énergie libérée par seconde est: $1,38 \cdot 10^7 \cdot 4,68 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,03 \cdot 10^{-5} \text{ J.s}^{-1} = P_2$

La puissance dégagée par la pastille est: $P = P_1 + P_2 = 2,13 \cdot 10^{-4} \text{ W}$

La puissance dégagée par une tonne vaut alors: $\frac{1000}{24} \cdot 2,13 \cdot 10^{-4} = 8,87 \cdot 10^{-3} \text{ W}$

C'est dix fois plus faible que la valeur indiquée (0,082 W/tonnes) car on n'a pas tenu compte des autres désintégrations radioactives des moaux "fils" issus de l'uranium

I. B Le combustible nucléaire

Q11. $E_0 = \text{nombre d'atome } U_{235} \cdot 4,68 \text{ MeV} = N_{235} \cdot 4,68 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

$$\text{On a: } m_{\text{pastille}} = N_{235} \cdot \frac{M_{U_{235}O_2}}{e_A} + N_{238} \cdot \frac{M_{U_{238}O_2}}{e_A} \quad \text{or: } \begin{aligned} N_{235} &= 0,05 N_{\text{uranium}} \\ N_{238} &= 0,95 N_{\text{uranium}} \\ \Rightarrow N_{238} &= \frac{0,95}{0,05} N_{235} = 19 N_{235} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_{235} = \frac{m_{\text{pastille}} \cdot e_A}{\frac{M_{U_{235}O_2}}{267,04 \text{ g}} + 19 \frac{M_{U_{238}O_2}}{270,04 \text{ g}}} = 8,36 \cdot 10^{20}$$

$$\text{d'où: } E_0 = 6,26 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Q12. On veut une énergie $E = 20000 \cdot 10^3 \cdot 3600 = 7,2 \cdot 10^{10} \text{ J}$

Une tonne de charbon donne $29,3 \cdot 10^9 \text{ J}$ donc il faut 2,46 tonnes de charbon

Pour calculer l'énergie E_0 fournie par la pastille de 7,5 g, on reprend le calcul de la question 11 en remplaçant 4,68 MeV par 200 MeV (énergie produite par fission)

$$E_0 = 8,36 \cdot 10^{20} \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,67 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Pour obtenir $7,2 \cdot 10^{10} \text{ J}$ il faut donc 2,7 pastilles soit 20,2 g de combustible nucléaire

En réalité les masses nécessaires sont supérieures car il faut tenir compte du rendement de la centrale. S'il est d'environ 30% (III.C), il faut multiplier les masses par 3.

II. Le cœur du réacteur

II.A Quelques analyses préliminaires

- Q 13. Les pastilles sont plus faciles à transporter et manipuler.
L'intérêt d'une multitude de petits crayons est d'augmenter la surface d'échange thermique avec l'eau du circuit primaire.
- Q 14. Les 24 emplacements restants servent à assurer la sécurité du réacteur en y plaçant des matériaux absorbants de neutrons.
- Q 15. Surface d'un crayon cylindrique de hauteur $h = 4 \text{ m}$ et de diamètre $D = 9,5 \text{ mm}$. $S = \pi D h = 0,12 \text{ m}^2$
Il y a 265 crayons par assemblage et 241 assemblages donc une surface totale:
 $S_{\text{tot}} = 265 \cdot 241 \cdot S = 7600 \text{ m}^2$. C'est bien de l'ordre de 8000 m^2 .

II.B Modélisation

- Q 16. Il y a symétrie de révolution autour de l'axe $Oz \Rightarrow \theta$ ne joue aucun rôle.
Le crayon est très long ($h \gg D$) $\Rightarrow$ on peut négliger les effets de bord et considérer que tous les z sont équivalents, aucun n'est privilégié.
 $\Rightarrow T$ ne dépend que de r .
- Loi de Fourier: $\vec{j} = -\lambda \text{grad} T = -\lambda \frac{dT(r)}{dr} \vec{u}_r$ $\vec{j}$ est radial
- Q 17. La température doit être maximale au centre du crayon $\Rightarrow$ on élimine les profils 1 et 3.
Il ne peut pas y avoir de flux thermique sortant de l'axe Oz (car cet axe est de volume nul ou la chaleur est produite en volume) $\Rightarrow \vec{j}(0) = \vec{0} \Rightarrow \frac{dT(0)}{dr} = 0$
 $\Rightarrow$ C'est le profil 4 qui est le bon.
- Q 18. $T(r) = T(R) - K(r^2 - R^2) \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -2Kr \Rightarrow \vec{j} = 2\lambda Kr \vec{u}_r$
On nous donne la densité de courant thermique en périphérie d'un crayon ($r = R = \frac{D}{2}$):
 $j(R) = 157 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} = 157 \cdot 10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
donc: $2\lambda KR = j(R) \Rightarrow K = \frac{j(R)}{2\lambda R}$ A.N: $K = 3,3 \cdot 10^7 \text{ K} \cdot \text{m}^{-2}$
- Q 19. La puissance produite dans un crayon est celle traversant sa surface latérale:
 $P = j(R) \cdot 2\pi R h$
Le volume d'un crayon est $\pi R^2 h$.
La puissance volumique libérée est donc: $p_v = \frac{j(R) \cdot 2\pi R h}{\pi R^2 h} = \frac{2j(R)}{R}$
A.N: $p_v = \frac{2 \cdot 157 \cdot 10^4}{4,75 \cdot 10^{-3}} = 6,61 \cdot 10^8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$
- Q 20. Puissance linéique: $P_\ell = \frac{P}{h} = j(R) \cdot 2\pi R$
A.N: $P_\ell = 157 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 9,5 \cdot 10^{-3} = 4,69 \cdot 10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$
C'est conforme à la valeur indiquée de $470 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-1} = 4,7 \cdot 10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$

Il existe une puissance thermique maximale à ne pas dépasser, sans quoi le crayon risque de fondre.

Q 21. $T(r=0) = T(R) + KR^2 = 332 + 3,3 \cdot 10^7 (4,75 \cdot 10^{-3})^2 = \underline{1077^\circ\text{C}} < T_{\text{fusion}}$

Q 22. Les mouvements de convection dans l'eau entraînent une discontinuité entre la température de surface du solide et la température de l'eau.

Q 23. La loi de Newton à une interface solide/fluide : $\Phi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = h(T_{\text{solide}} - T_{\text{fluide}}) \cdot S$

donne : $j(R) = h(T(R) - T_{\text{eau}})$

$$\Rightarrow T(R) = T_{\text{eau}} + \frac{j(R)}{h}$$

On a donc maintenant : $T(r=0) = T_{\text{eau}} + \frac{j(R)}{h} + KR^2$

Pour de l'eau en convection forcée, on peut prendre $h = 1000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

A.N. : $T(r=0) = 332 + \frac{157 \cdot 10^4}{10^3} + 3,3 \cdot 10^7 \cdot (4,75 \cdot 10^{-3})^2 = \underline{2650^\circ\text{C}}$

Q 24. Les calculs précédents ont été faits avec la conductivité thermique moyenne de $5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

On a $\lambda < 5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ pour $T > 750 \text{ K} = 477^\circ\text{C}$

Donc dans le crayon la conductivité thermique sera plus faible que $5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$\Rightarrow$ la chaleur s'évacuera moins bien

$\Rightarrow$ la température au centre sera plus élevée.