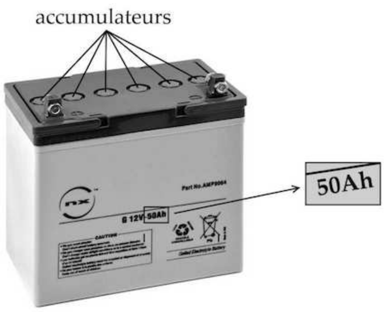
Stockage de l'énergie électrique

1 Batterie d'accumulateurs



Une batterie au plomb est un ensemble de six accumulateurs (cellules électrochimiques plomb – acide sulfurique) raccordés en série et réunis dans un même boîtier (Figure ci contre). Une batterie possède un caractère générateur durant sa décharge et un caractère récepteur durant sa charge (conversion réversible entre énergie électrique et énergie chimique). Ce type de batterie est largement utilisé dans l'industrie, dans l'équipement des véhicules automobiles ou pour stocker de l'énergie produite par intermittence (énergie solaire ou éolienne).

Étude d'un accumulateur : on s'intéresse pour le moment à un seul des six accumulateurs de la batterie.
Par définition, sa tension à vide E_{acu} est la tension à ses bornes lorsqu'il ne débite aucun courant.
On donne ci-dessous (Figure 1) la courbe représentant la tension "à vide" d'un accumulateur en fonction de son pourcentage de charge.

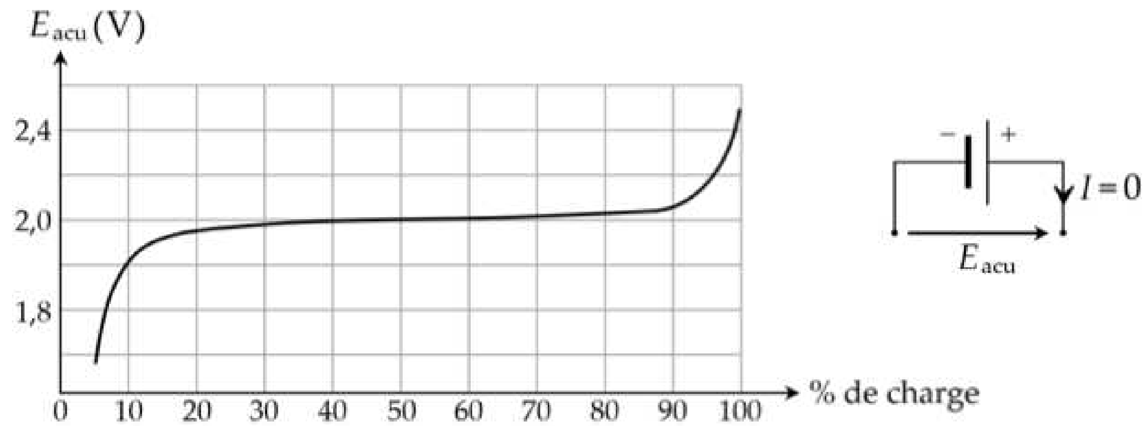


Figure 1 – Tension à vide d'un accumulateur en fonction de son pourcentage de charge

Lorsque l'accumulateur débite un courant I non nul, la tension U à ses bornes diminue.
On donne ci-dessous (Figure 2) la courbe représentant la tension U aux bornes d'un accumulateur chargé à 50 % en fonction du courant I qui le traverse en convention générateur.

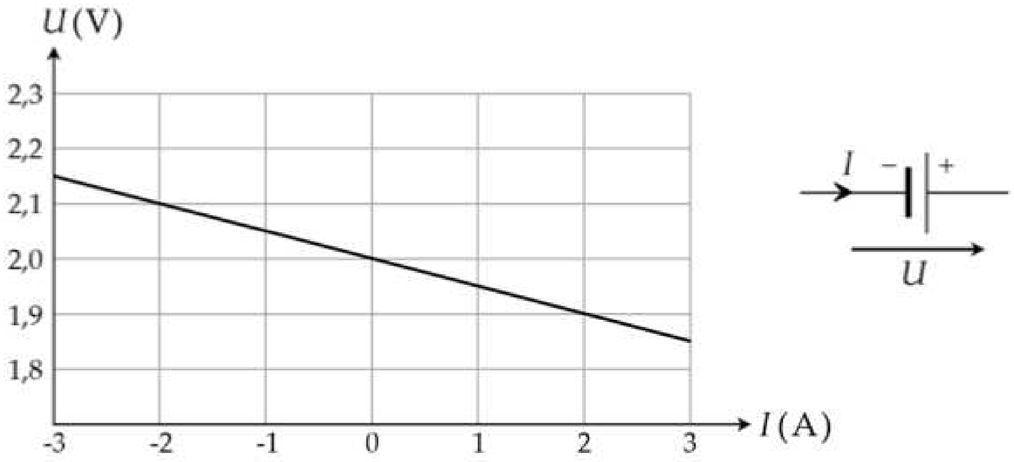


FIGURE 2 – Caractéristique statique d'un accumulateur chargé à 50 %

Dans cette partie, la charge de l'accumulateur étudié sera constamment comprise en 20 % et 90 %.

Q1 1. Un accumulateur est-il un dipôle linéaire ou pas / actif ou passif / symétrique ou polarisé ?

2. Justifier que l'on puisse modéliser l'accumulateur par l'association en série d'une source idéale de f.é.m.
Q2 constante E_{acu} et d'un résistor de résistance r_{acu}.

Q3 3. Donner la représentation Thévenin équivalente à un accumulateur. Exprimer alors la tension à ses bornes U en fonction de E_{acu}, r_{acu} et I l'intensité du courant qui le traverse en convention générateur.

Q4 4. Déterminer graphiquement les valeurs numériques de E_{acu} et r_{acu}.

Caractéristiques de la batterie : la batterie étudiée comporte un ensemble de six accumulateurs identiques à celui étudié précédemment.

1. Comment doit-on associer ces six accumulateurs de façon à obtenir une batterie de tension à vide E_{bat}
Q5 maximale ?

Q6 2. Donnez la représentation Thévenin équivalente à la batterie alors constitué. On précisera la valeur de E_{bat} et celle de r_{bat}, la résistance interne de la batterie.

Charge de la batterie : on étudie maintenant la "charge" d'une batterie initialement complètement déchargée (pourcentage de charge nul), on considère alors $e_{bat} = 0$.
Au fur et à mesure de la charge e_{bat} augmentera.
De façon à effectuer la charge, on utilise une alimentation électrique modélisée par un générateur de force électromotrice $E = 16$ V constante et de résistance interne négligeable.
On réalise le montage représenté FIGURE 3 ci-dessous : on a placé deux résistors de résistances respectives $R_1 = 2{,}0\ \Omega$ et $R_2 = 5{,}0\ \Omega$ pour contrôler la charge de la batterie.

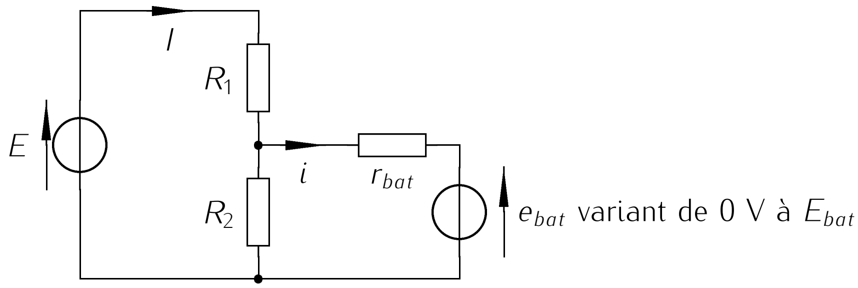


FIGURE 3 – Circuit utilisé pour charger la batterie

1. Au début de la charge, la batterie est totalement déchargée, on considère alors $e_{bat} = 0$ V. À quel dipôle passif la batterie est-elle alors équivalente ? En déduire, par la méthode de votre choix, la valeur i_0 de
Q7 l'intensité i du courant la traverse. Faire l'application numérique.

2. Lorsque e_{bat} n'est pas nul, c'est à dire en cours de charge, écrire un système d'équations permettant de
Q8 déterminer l'expression de i en fonction de E, e_{bat}, R_1, R_2 et r_{bat}.
3. Montrer que
$$i = \frac{ER_2 - (R_1 + R_2)e_{bat}}{r_{bat}R_1 + r_{bat}R_2 + R_1R_2}$$
(Il s'agit d'une question un peu calculatoire, ne passez pas trop de temps dessus.)
4. Pour quelle valeur de e_{bat} l'intensité i s'annule-t-elle ? D'après le graphe de la Figure 1, quel sera alors
Q9 le pourcentage de charge des accumulateurs de la batterie ?
5. On souhaite que i s'annule lorsque la batterie est chargée à 100 %.
Q10 Quel sera alors la valeur de e_{bat} ?
Q11 On conserve $R_1 = 2{,}0\ \Omega$. Quelle valeur numérique faut-il maintenant donner à R_2 ?

2 Utilisation d'un condensateur

De façon à utiliser un système de stockage plus "portable" que la batterie étudiée précédemment, on décide d'utiliser un condensateur de capacité C élevée.
On le considèrera initialement complètement déchargé.

Charge d'un condensateur idéal à travers un résistor : on place un interrupteur K, une résistance $R = 10\ \Omega$ et un condensateur de capacité C en série aux bornes d'un générateur de tension idéal de force électromotrice constance $E = 12$ V (Cf. Figure 4).

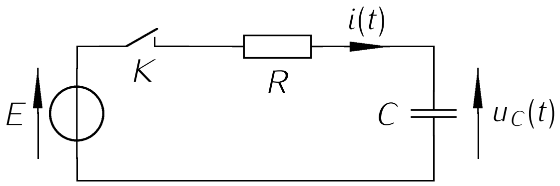


Figure 4 – Charge d'un condensateur idéal à travers un résistor

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

1. Déterminez la valeur $u_C(0^+)$ et $u_C(\infty)$ de la tension $u_C(t)$ respectivement juste après la fermeture de K et
Q12 au bout d'un temps très long (infini). Justifiez vos réponses.
Q13 2. Même question pour i, l'intensité du courant dans le circuit : on donnera $i(0^+)$ et $i(\infty)$.
3. On pose $\tau = RC$ et on se place à $t \geq 0$.
   (a) Quelle est l'unité de τ dans le système international MKSA (mètre, kilogramme, seconde, ampère) ?
Q14 Démontrez ce résultat à partir de relations constitutives.
Q15 (b) **Établir** l'équation différentielle à laquelle obéit $u_C(t)$.
Q16 (c) **Établir** l'expression de la tension $u_C(t)$ pour $t \geq 0$.
   (d) Tracez l'allure de la courbe représentative de la fonction $u_C(t)$.
Q17 On fera apparaître la tangente à l'origine et l'asymptote.
   (e) Déterminez, en fonction de τ, l'expression du temps t_1 à partir duquel la charge du condensateur diffère
Q18 de moins de 1 % de sa charge finale.
4. Exprimez l'énergie $E_C(\infty)$ emmagasinée par le condensateur **lorsque sa charge est terminée** en fonction
Q19 de C et E.
Q20 5. Quelle est la puissance dissipée par effet Joule à la fin de la charge de C ?

Prise en compte de la résistance de fuite R_f : le condensateur précédent comporte en réalité des éléments résisitifs qu'on modélisera par une résistance R_f dit "résistance de fuite" placée en parallèle avec C (Cf. Figure 5).

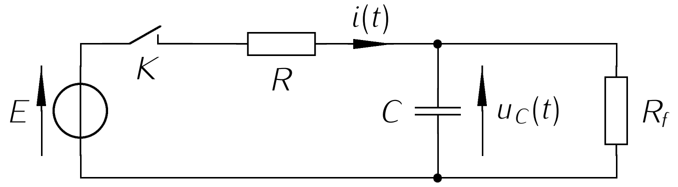


Figure 5 – Charge d'un condensateur réel à travers un résistor

À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

1. Déterminez la valeur $u_C(0^+)$ et $u_C(\infty)$ de la tension $u_C(t)$ respectivement juste après la fermeture de K et
Q21 au bout d'un temps très long (infini). Justifiez vos réponses.
Q22 2. Même question pour i, l'intensité du courant qui traverse R : on donnera $i(0^+)$ et $i(\infty)$.
3. On se place à $t \geq 0$.
Q23 (a) Quelle est la relation liant $i(t)$ à $u_C(t)$?
Q24 (b) Quelle est l'équation différentielle à laquelle obéit $u_C(t)$?
Q25 (c) En déduire l'expression de la tension $u_C(t)$ pour $t \geq 0$.
(d) Tracez l'allure de la courbe représentative de la fonction $u_C(t)$.
Q26 On fera apparaître la tangente à l'origine et l'asymptote.
4. Exprimez l'énergie $E_C(\infty)$ emmagasinée par le condensateur **lorsque sa charge est terminée** en fonction
Q27 de C, R, R_f et E.
5. Quelle est la puissance dissipée par effet Joule dans le condensateur réel lorsque sa charge est terminée ?
Q28 Faites l'application numérique pour $R_f = 10$ MΩ. Commentez.

3 Utilisation d'une bobine réelle

Bobine réelle : il s'agit d'un dipôle constitué par enroulement cylindrique d'un fil électrique.
Elle est caractérisée par son inductance L et sa résistance interne r.
On considère une bobine réelle d'inductance L et de résistance interne r non nulle.
On la modélise par l'association série d'une bobine idéale d'inductance L avec un résistor de résistance r (Figure 6 ci-dessous).

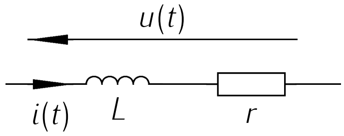


Figure 6 – Bobine réelle

1. Un fil cylindrique de longueur L, de section (aire) S et de résistivité ρ possède une résistance

$$r = \frac{\rho L}{S}$$

Sachant que le cuivre employé a une résistivité ρ de l'ordre de 20.10^{-9} Ω.m, que le diamètre du fil de l'ordre du millimètre et que la valeur de r indiquée sur la bobine utilisée est de l'ordre de 10 Ω, donner
Q29 l'ordre de grandeur de la longueur L du fil enroulé.
2. Donnez la relation constitutive de la bobine réelle, c'est à dire la relation qui lie $u(t)$ à $i(t)$ sur la figure
Q30 ci-dessus (Figure 7).
3. En déduire, en fonction de $i(t)$ et ses dérivées, l'expression $p(t)$ de la puissance reçue par la bobine réelle
Q31 à l'instant t.

Stockage d'énergie dans la bobine : on utilise la bobine réelle précédente pour réaliser le circuit représenté ci-dessous (FIGURE 7).

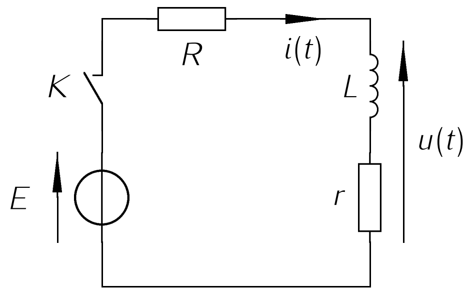


FIGURE 7 – Application d'un échelon de tension

Un générateur de tension de force électromotrice $E = 12$ V associé en série à un résistor de résistance $R = 10$ Ω, un interrupteur K et la bobine précédente avec $L = 1$ H et $r = 10$ Ω.
On ferme l'interrupteur K à $t = 0$ le courant étant précédemment nul.

Q32 1. Établir l'équation différentielle régissant les variations de l'intensité $i(t)$ dans le circuit pour $t \geq 0$.

Q33 2. Mettre cette équation sous la forme canonique.
On fera apparaître la constante de temps τ dont on donnera l'expression et la valeur numérique.

Q34 3. Déterminez l'expression de $i(t)$ en justifiant soigneusement.

Q35 4. Tracez soigneusement $i(t)$.

Q36 5. Déterminez l'expression de $u(t)$ la tension aux bornes de la bobine **réelle** ?

Q37 6. Déterminez, en fonction de E, R, r, L, t et τ la puissance $p(t)$ reçue par la bobine réelle à un instant t.

Q38 7. Quelle est la valeur de $p(t)$ en régime permanent ? Interpréter physiquement, faites l'application numérique et commentez.

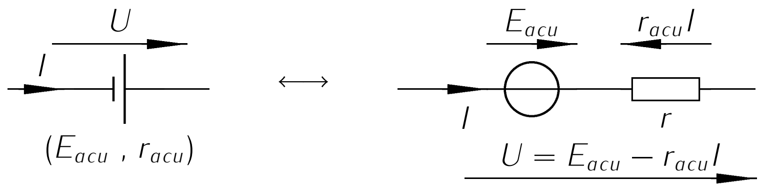
STOCKAGE DE L'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

3.1 Batterie d'accumulateurs

1. On se base sur la caractéristique de l'accumulateur, figure 2 de l'énoncé :
   - C'est une portion de droite donc l'accumulateur est un composant $\boxed{\text{linéaire.}}$
   - Elle ne passe pas par l'origine donc l'accumulateur est un composant $\boxed{\text{actif.}}$
   - Q39 Elle n'admet pas l'origine comme point de symétrie donc c'est un composant $\boxed{\text{polarisé}}$.

> ***Justifiez à l'aide de la courbe $U(I)$, figure 2 de l'énoncé.***

2. On retrouve la même forme que la caractéristique $\boxed{\text{d'un générateur réel de tension}}$ dont le modèle de Thévenin comporte justement un générateur de tension idéal et une résistance interne en série. Le point important qui nous permet de dire cela est que la forme est $\boxed{\text{une droite}}$. Dans le cas contraire, on ne
Q40 pourrait pas faire cette modélisation.
3. La représentation Thévenin équivalente à un accumulateur est donc :

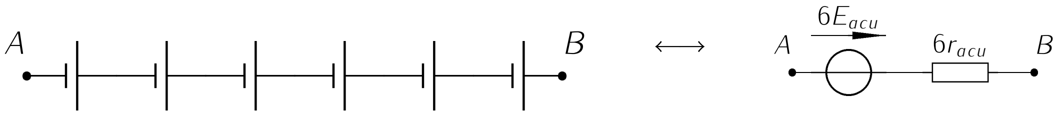


> ***Il faut représenter U, sinon $U = E - rI$ n'a pas de sens. L'énoncé demandait la convention générateur, soyez prudent sur les signes.***

4. D'après la relation précédente, E_{acu} est la valeur de U lorsque $I = 0$, on lit sur la figure 2, $\boxed{E_{acu} = 2{,}0\ \text{V}}$. De même, r_{acu} correspond à l'opposé de la pente puisqu'on a tracé $U(I)$, on détermine alors $r = -\frac{1{,}9-2{,}1}{2-(-2)} =$
Q41 $\frac{0{,}2}{4} \Rightarrow \boxed{r_{acu} = 0{,}05\ \Omega}$

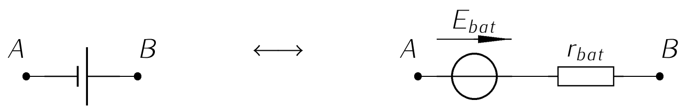
Caractéristiques de la batterie :

1. Pour obtenir une batterie avec E_{bat} maximale, il faut que les forces électromotrices e_{bat} des 6 accumulateurs s'additionnent. On doit donc les brancher en série et en concordance : borne $-$ d'un accumulateur reliée à la borne $+$ du suivant comme indiqué ci-dessous.



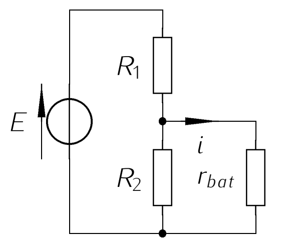
> ***Précisez le branchement des bornes car il s'agit de dipôles non symétriques***

2. Les six f.e.m étant orientées dans le même sens, on obtient $\boxed{E_{bat} = 6E_{acu} = 12\ \text{V}}$ et comme les résistances
Q42 internes sont montées en série, $\boxed{r_{bat} = 6r_{acu} = 0{,}3\ \Omega}$.



Charge de la batterie :

1. Si $e_{bat} = 0$ V, la batterie est simplement équivalente à un résistor de résistance r_{bat}, le circuit de charge peut être simplifié :



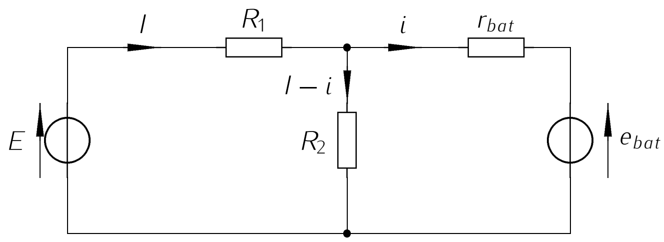
Et en utilisant la formule des ponts diviseurs de courant,

$$i_0 = \frac{R_2}{R_2 + r_{bat}} * \frac{E}{R1 + \frac{R_2 r_{bat}}{R_2 + r_{bat}}} \Rightarrow \boxed{i_0 = \frac{R_2 E_{bat}}{r_{bat}R_2 + r_{bat}R_1 + R_1 R_2} \simeq 6{,}6 \text{ A}}$$

La batterie** (e_{bat},r_{bat}) **était équivalente à** r_{bat}**, pas un fil.

Donnez l'expression littérale puis la valeur numérique de** i_0**.

2. Lorsque e_{bat} n'est pas nul, on peut déterminer le système d'équations voulu en appliquant les lois de Kirchhoff :



La loi des nœuds implique que le courant parcourant R_2 est $I - i$. L'application de la loi des mailles dans la maille de gauche puis celle de droite (par exemple) nous donne :

$$\begin{cases} E - R_1 I - R_2(I - i) = 0 \\ e_{bat} + r_{bat} i - R_2(I - i) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues, on peut donc en tirer i.

3. Pour démontrer l'expression de i on peut résoudre le système d'équations précédent.

$$\Rightarrow \boxed{i = \frac{ER_2 - (R_1 + R_2)e_{bat}}{r_{bat}R_1 + r_{bat}R_2 + R_1 R_2}}$$

4. D'après la relation précédente, $i = 0$ lorsque

$$ER_2 - (R_1 + R_2)e_{bat} = 0 \Rightarrow \boxed{e_{bat} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}}$$

L'application numérique nous donne $e_{bat} = \frac{5 \times 16}{5+2} \simeq 11{,}4$V
On aurait alors pour chaque accumulateur $E_{acu} = \frac{e_{bat}}{6} \simeq 1{,}9$ V. En se reportant à la figure 1, on relève que
Q43 lorsque $E_{acu} = 1{,}9$ V, $\boxed{\text{la batterie n'est chargée qu'à 10 \%.}}$

Ne confondez pas** E_{acu} **et** e_{bat}**.

5. Pour que les accumulateurs de la batterie soient chargés à 100 %, d'après le graphe FIGURE 1, il faut que
Q44 la tension à leurs bornes soit de $E_{acu} = 2{,}5$ V donc que $\boxed{e_{bat} = 6E_{acu} = 15 \text{ V}}$.
Or i s'annule lorsque

$$ER_2 - (R_1 + R_2)e_{bat} = 0 \Rightarrow R_2(E - e_{bat}) = R_1 e_{bat} \Rightarrow \boxed{R_2 = \frac{R_1 e_{bat}}{E - e_{bat}}}$$

Q45 Pour $R_1 = 2{,}0\ \Omega$ et $e_{bat} = 15$ V, on calcule $\boxed{R_2 = \frac{2\times 15}{16-15} = 30\ \Omega}$.

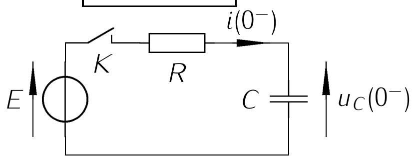
Soignez vos lectures graphique. Donnez l'expression littérale de R_2.

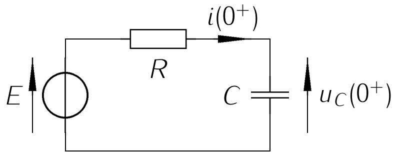
3.2 Utilisation d'un condensateur

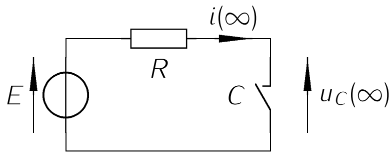
Charge d'un condensateur idéal à travers un résistor :

Questions de cours pur

1. Connaissant les conditions initiales ($i(0^-$ $= 0$ et $u_C(0^-) = 0$), on trace ci-dessous au centre le circuit équivalent à $t = 0^+$ en respectant la continuité de la tension aux bornes du condensateur : $u_C(0^-) = \boxed{u_C(0^+) = 0}$.



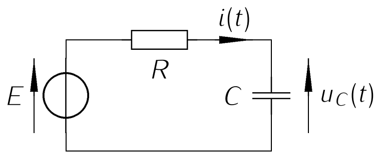




En régime permanent ($t \to \infty$) le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert (circuit ci-dessus à
Q46 droite) et une loi des mailles permet d'obtenir $E - R \times 0 - u_C = 0$ d'où $\boxed{u_C(\infty) = E.}$

Le fait que le condensateur soit chargé implique $u_C = Cte$ mais il faut montrer que cette constante est E ⇒ figures à tracer

2. La loi des mailles dans le circuit équivalent à $t = 0^+$ nous permet d'écrire $E - R.i(0^+) - 0 = 0 \Rightarrow$
Q47 $\boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}}$. Dans le circuit de droite on lit $\boxed{i(\infty) = 0}$
3. Charge du condensateur.
   (a) On donne $\tau = RC$, c'est la constante de temps du circuit, son unité est donc la $\boxed{\text{seconde}}$.
   On peut démontrer ce résultat en écrivant les relations constitutives $i = C\frac{du}{dt}$ pour un condensateur donc l'unité de C, le Farad est également l' A.s.V^{-1} alors que par application de la loi d'Ohm $u = Ri$ aux bornes d'un résistor d'où l'unité de R l'Ohm ou V.A^{-1}.
   On en déduit que $\boxed{[RC]=\text{A.s.V}^{-1}\text{.V.A}^{-1}\text{, c'est à dire en seconde}}$.
   (b) On applique la loi des mailles dans le circuit ci-dessous pour $t \geq 0$, c'est à dire quand K est fermé, la tension à ses bornes u_K est alors nulle et



Q48 $E - 0 - Ri(t) - u_C(t) = 0$ avec $i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$ soit $\boxed{\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}}$ avec $\tau = RC$

(c) La solution de cette équation est de la forme $sol = sol_H + sol_P$ somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière.

L'énoncé demande d'établir $u_C(t)$, ne parachutez pas le résultat.

La sol_H est de la forme $A.\exp(-\frac{t}{\tau})$ et sol_P de même nature que le second membre, constante, soit $u_C(t) = A.\exp(-\frac{t}{\tau}) + B$ où A et B sont des constantes.
On détermine B, la solution particulière en l'injectant dans l'équation différentielle :

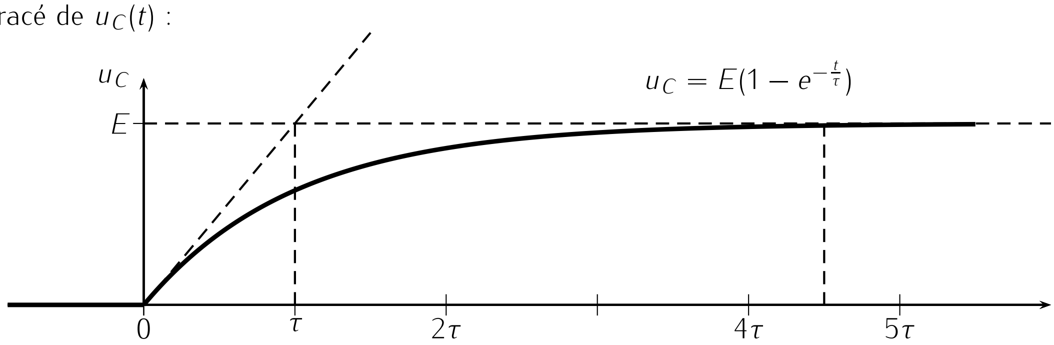
$$\frac{dB}{dt} + \frac{B}{\tau} = \frac{E}{\tau} \Rightarrow B = E$$

En utilisant la condition initiale, $u_C(0^+) = 0$, on détermine ensuite la constante A :

$$A.\exp(0) + E = 0 \Rightarrow A = -E \Rightarrow \boxed{u_C(t) = E\left[1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right]}$$

Vérifiez rapidement l'homogénéité et la cohérence avec la CI.

(d) Tracé de $u_C(t)$:



— Continuité de $u_C(t)$ (en particulier à $t = 0$).
— Pour $t > t_1$ grand devant τ (Cf plus loin), $u_C(t > t_1) \simeq E$: asymptote horizontale.
Q49 — La tangente à l'origine coupe l'asymptote E en $t = \tau$.

Inutile de calculer la tangente à l'origine par contre il faut soigner les tracés. Vérifiez la cohérence avec l'équation.

(e) À la "fin de la charge", $u_C = E$, on cherche donc t_1 tel que $u_C = \frac{99}{100}E$ d'où $\frac{99}{100}E = E[1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}]$ soit
Q50 $10^{-2} = e^{-\frac{t_1}{\tau}}$ et finalement, $\boxed{t_1 = \tau \ln 100 \simeq 4{,}6\tau.}$

Effectuez réellement le calcul et simplifiez le résultat obtenu (ne pas laisser la forme $-\tau.\ln(0{,}01)$)

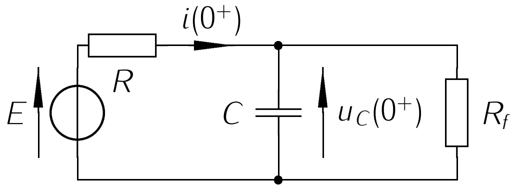
4. À tout instant l'énergie $E_C(t)$ emmagasinée par le condensateur est $E_C(t) = \frac{1}{2}cu(t)^2$ et comme à la fin de
Q51 la charge, $u_C(t \to \infty) = E$, on e déduit $\boxed{E_C(\infty) = \frac{1}{2}CE^2}$.

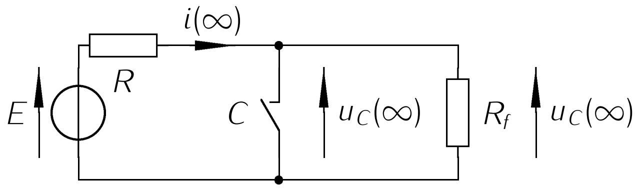
Lisez bien l'énoncé on demandait l'énergie à la fin de la charge

5. À la fin de la charge le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $i(\infty) = 0$ or la puissance dissipée par effet Joule est ici $p_J(t) = Ri(t)^2$ à tout instant.
Q52 Ainsi, $\boxed{\text{à la fin de la charge, la puissance dissipée par effet Joule est nulle}}$.

Prise en compte de la résistance de fuite R_f :

1. Comme précédemment, on représente le circuit à $t = 0^+$ (ci-dessous à gauche) et au bout d'un temps très long (ci-dessous à droite).





Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0}$.

Q53 Sur la figure de droite on reconnait un pont diviseur de tension avec $\boxed{u_C(\infty) = \dfrac{R_f}{R+R_f}E}$.

2. Par application d'une loi des mailles dans la maille de gauche du circuit à $t = 0^+$, on peut écrire

$$E - Ri(0^+) - u_C(0^+) = 0 \Rightarrow \boxed{i(0^+) = \frac{E}{R}}$$

comme dans le cas du condensateur idéal.

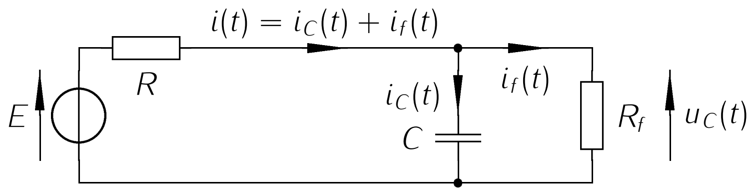
Dans le circuit équivalent en régime permanent, on a cette fois, par application d'une loi des mailles (ou directement avec la loi de Pouillet)

$$E - Ri(\infty) - R_f i(\infty) = 0 \Rightarrow \boxed{i(\infty) = \frac{E}{R+R_f}}$$

Q54

Tracez le circuit vous fait gagner du temps et de la clarté dans vos justifications

3. Charge du condensateur réel.



(a) D'après la loi des nœuds, $i(t) = i_C(t) + i_f(t)$ (Cf figure ci-dessus) avec $i_f = \frac{u_{R_f}(t)}{R} = \frac{u_C(t)}{R_f}$ et $i_C(t) =$
Q55 $C.\frac{du_C(t)}{dt}$ d'où $\boxed{i(t) = C.\dfrac{du_C(t)}{dt} + \dfrac{u_C(t)}{R_f}}$

Lisez bien l'énoncé et exploitez la figure de l'énoncé

(b) En écrivant une loi des mailles dans la maille périphérique, on obtient

$$E - Ri(t) - u_C(t) = 0 \Rightarrow E - RC.\frac{du_C(t)}{dt} - \frac{R}{R_f}u_C(t) - u_C(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{R_f C}\right)u_C(t) = \frac{E}{RC} \iff \boxed{\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{R+R_f}{RR_f C}u_C(t) = \frac{E}{RC}}$$

(c) En posant $\tau = \frac{RR_f C}{R+R_f}$ on se ramène à l'équation canonique dont la solution est de la forme $sol = sol_H + sol_P$ avec ici $sol_H = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$ et sol_P est une constante B telle que

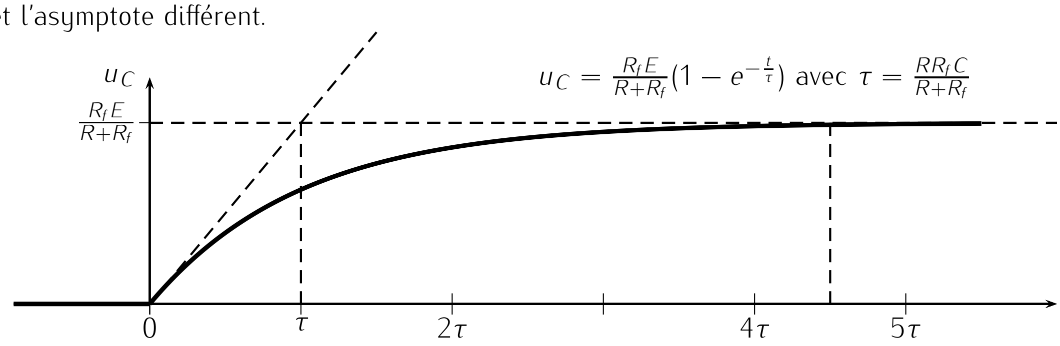
$$0 + \frac{B}{\tau} = \frac{E}{RC} \Rightarrow B = \frac{\tau}{RC} = \frac{R_f E}{R+R_f} \qquad \Rightarrow u_C(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R_f E}{R+R_f}$$

et on détermine A à partir de la condition initiale $u_C(0^+) + 0 \Rightarrow A = -\frac{R_f E}{R+R_f}$ et finalement,

$$\boxed{u_C(t) = \frac{R_f E}{R+R_f}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{RR_f C}{R+R_f}}$$

Q56

(d) On retrouve la même allure que lors de la charge du condensateur réel, seules la constante de temps et l'asymptote diffèrent.



4. Lorsque la charge est terminée $u_C(t) = u_C(\infty) = \frac{R_f E}{R+R_f}$ d'où une énergie stockée

$$E_C(\infty) = \frac{1}{2} C u_C^2(\infty) \Rightarrow \boxed{E_C(\infty) = \frac{CR_f^2 E^2}{2(R+R_f)^2}}$$

Q57 Cette énergie est inférieure à celle stockée dans un condensateur idéal.

5. Lorsque sa charge est terminée, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé et l'intensité du courant qui parcourt R_f est $i_R(\infty) = i(\infty) = \frac{E}{R+R_f}$. La puissance alors dissipée par effet Joule dans R_f est

Q58 ainsi $\boxed{p_J = R_f i(\infty)^2 = \frac{R_f E^2}{(R+R_f)^2} \simeq \frac{E^2}{R_f} \simeq 1{,}44.10^{-5}\ \text{W}}$, c'est très faible, voire négligeable.

Bobine réelle :

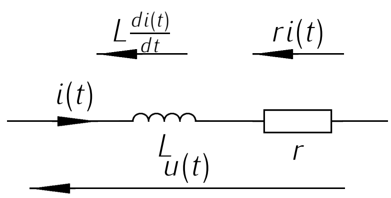
1. Le diamètre d du fil est de l'ordre du millimètre, on a alors

$$S = \pi \frac{d^2}{4} \Rightarrow r = \frac{\rho L}{S} = \frac{4\rho L}{\pi d^2} \Rightarrow L = \frac{\pi d^2 r}{4\rho} \simeq \frac{3 \times 10 \times (0.5.10^{-3})^2}{2.10^{-8}} \simeq 380\ \text{m.}$$

Q59 On peut donc estimer que $\boxed{L \text{ est de l'ordre de quelques centaines de mètres.}}$

Contrôlez la cohérence – risque de Malus –

2. La bobine réelle est modélisée par l'association série d'une inductance pure et d'un résistor.



Q60 Par additivité des tensions on peut écrire en convention récepteur, $\boxed{u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} + ri(t)}$

Lisez bien l'énoncé et exploitez la figure de l'énoncé

Q61 3. Toujours en convention récepteur, la puissance reçue est $\boxed{p(t) = u(t).i(t) = L.i(t)\frac{di(t)}{dt} + ri^2(t)}$.

Stockage d'énergie dans la bobine :

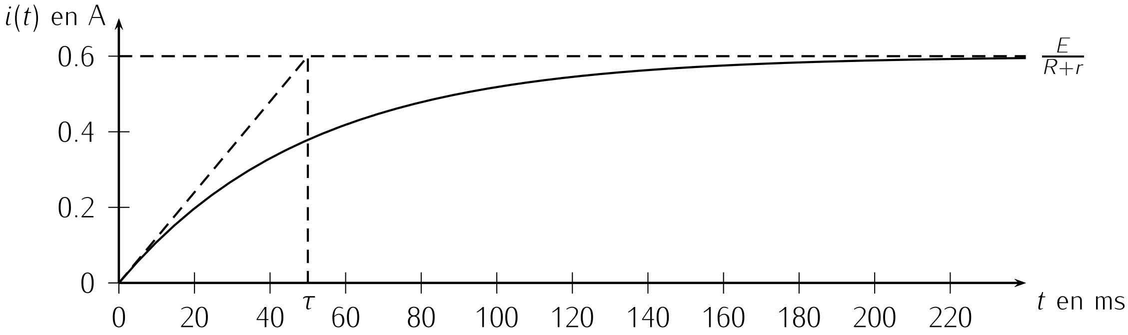
1. Pour $t \geq 0$, K est fermé et par application d'une loi des mailles et des relations constitutives, on obtient :

$$E - Ri(t) - L.\frac{di(t)}{dt} - ri(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{R+r}{L}i(t) = \frac{E}{L}}$$

Q62 2. Et sous la forme canonique, $\boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{E}{L}}$ avec $\boxed{\tau = \frac{L}{R+r} = 5.10^{-2} \text{ s soit } 50 \text{ ms}}$

3. La solution de cette équation est la somme de la solution de l'équation homogène $A.\exp(-\frac{t}{\tau})$ où A est une constante d'intégration et d'une solution particulière $\frac{E\tau}{L} = \frac{E}{R+r}$.
On détermine A en utilisant la continuité de $i(t)$ à $t = 0$: $i(0^-) = i(0^+) \Rightarrow 0 = A + \frac{E}{R+r} \Rightarrow A = -\frac{E}{R+r}$. On
Q63 en déduit ensuite $\boxed{i(t) = \frac{E}{R+r}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]}$

4. On trace $i(t)$ sur le graphe ci-dessous en utilisant la condition initiale, la valeur en régime permanent et la
Q64 tangente à l'origine qui coupe l'asymptote en $t = \tau$.



Même technique de tracé, ne vous répétez pas. On ne demandait pas explicitement les valeurs numériques mais soignez le tracé du graphe.

5. On détermine $u(t)$ par application de la relation constitutive :

$$u(t) = L.\frac{di(t)}{dt} + ri(t) \Rightarrow u(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{rE}{R+r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow \boxed{u(t) = \frac{E}{R+r}(r + Re^{-\frac{t}{\tau}})}$$

Q65 6. En convention récepteur, la bobine reçoit la puissance

$$\boxed{p(t) = u(t).i(t) = \frac{E^2}{R+r}\left[e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r}{R+r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\right].\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]}$$

7. En régime permanent, $t \gg \tau$, on a $p(t) \rightarrow \boxed{p(\infty) = \frac{rE^2}{(R+r)^2} = r.i^2(\infty) = 10 \times (0{,}6)^2 \simeq 3{,}6 \text{ W}}$.

On peut interpréter le résultat précédent en remarquant qu'en régime permanent, la bobine réelle est équivalente à un résistor de résistance r, la puissance reçue correspond donc à celle que va dissiper ce
Q66 résistor r par $\boxed{\text{effet Joule}}$.