

3.3 Diffusion thermique-Exercice 10

La Terre est assimilée à une sphère de centre O, de rayon $R = 6370$ km et de masse volumique $\rho = 2800$ kg.m⁻³. La température à l'intérieur de la Terre est une fonction décroissante de la coordonnée sphérique radiale r . La température à la surface de la Terre est $T_0 = 290$ K. On se place en régime permanent. La conduction est le seul mode de transfert thermique envisagé et la conductivité thermique de la Terre est $\lambda = 4$ W.m⁻¹.K⁻¹.

Dans cette modélisation simplifiée, on définit deux zones :

- du centre de la Terre jusqu'à la limite de la lithosphère en $r_m = 6280$ km, il n'y a aucune source de production de chaleur.
- dans la lithosphère, c'est-à-dire pour $r_m \leq r \leq R$, on tient compte de la source de chaleur que constitue la radioactivité d'éléments comme l'uranium. Ces sources radioactives dégagent dans la lithosphère une puissance thermique par unité de masse constante $H = 5.10^{-10}$ W.kg⁻¹.

a-Calculer le flux thermique Φ à travers une sphère de rayon $r < r_m$. Quelle propriété possède ce flux ?

En déduire le profil de température $T(r)$ dans cette zone en fonction de deux constantes A et B. Quelle condition aux limites permet de déterminer la valeur de l'une d'elles ? Quelle est la signification de l'autre ? Commenter les résultats $j_Q(r)$ et $T(r)$ obtenus dans cette zone. On note $T(r=0) = T_C$ la température du centre.

b-Pour l'étude de la lithosphère, procéder à un bilan d'énergie pour établir l'équation de diffusion thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes pour la température $T(x)$. On admet que la structure de cette

équation est inchangée en coordonnées sphériques en remplaçant le laplacien $\frac{d^2T}{dx^2}$ par $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right)$.

c-En déduire la température $T(r)$ dans la lithosphère en fonction de deux constantes d'intégration C et D.

d-Quelles sont les conditions aux limites de la lithosphère ? Exprimer C et D en fonction de T_0 , R , r_m , ρ , H et λ .

e-Tracer l'allure de $T(r)$ puis calculer numériquement la température au centre T_C ainsi que le gradient de température dT/dr en K.km⁻¹ à la surface de la Terre.

f-Exprimer le flux thermique total Φ en surface de la Terre en fonction de la puissance radioactive et faire l'application numérique. En déduire le flux surfacique ϕ .

3.3 Diffusion thermique-Exercice 10

a- $\Phi = \iint_{\text{sphère}} \vec{j}_Q(r) \cdot d\vec{S}$ donne : $\Phi = j_Q(r) \cdot 4\pi r^2$

Il se conserve, donc ne dépend pas de r , en régime permanent et en l'absence de source interne.

Avec la loi de Fourier : $\Phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 4\pi r^2$ Equation du type : $\frac{dT}{dr} = -\frac{A}{r^2}$ de solution : $T(r) = \frac{A}{r} + B$

La température doit rester finie au centre de la Terre donc $A = 0$. On a alors $B = T(r=0) = T_c$

Finalement : $T(r) = T_c$ et $j_Q(r) = 0$. Température uniforme et pas de diffusion thermique pour $0 \leq r \leq r_m$

b- Système : tranche de solide de section S , comprise entre x et $x+dx$

Premier principe au système entre t et $t+dt$: $dU = \delta Q_{\text{entrant}} + \delta Q_{\text{créée}}$

En régime stationnaire $dU = 0$, d'où en divisant par dt : $0 = \Phi_{\text{entrant}} + P_{\text{créée}}$

On a : $\Phi_{\text{entrant}} = \Phi_{\text{entrant en } x} + \Phi_{\text{entrant en } x+dx} = j_Q(x) \cdot S - j_Q(x+dx) \cdot S = -\frac{dj_Q}{dx} S dx = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} S dx$

$P_{\text{créée}} = H dm = H \rho S dx$

D'où : $\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\rho H}{\lambda}$

En passant en coordonnées sphériques : $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\rho H}{\lambda}$

c- $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\rho H}{\lambda} r^2$ s'intègre en : $r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{\rho H}{3\lambda} r^3 - C$

Puis : $\frac{dT}{dr} = -\frac{\rho H}{3\lambda} r - \frac{C}{r^2}$ s'intègre en : $T(r) = -\frac{\rho H}{6\lambda} r^2 + \frac{C}{r} + D$

d- Conditions aux limites :

- continuité du flux thermique en $r = r_m$: $j_Q(r_m) = 0$ soit $\left(\frac{dT}{dr} \right) (r = r_m) = 0$ d'où $C = -\frac{\rho H}{3\lambda} r_m^3$

- continuité de la température en $r = R$: $T(R) = T_0$ donne $D = T_0 + \frac{\rho H}{6\lambda} R^2 + \frac{\rho H}{3\lambda R} r_m^3$

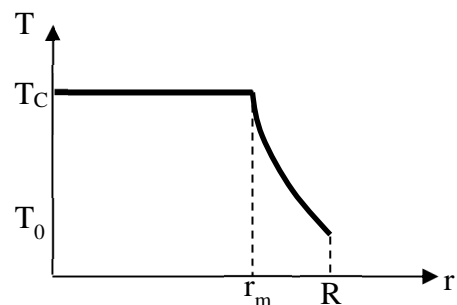
e- A.N : $C = -2,89 \cdot 10^{13} \text{ K.m}$
 $D = 6,90 \cdot 10^6 \text{ K}$

On a : $T_c = T(r=r_m) = -\frac{\rho H}{6\lambda} r_m^2 + \frac{C}{r_m} + D$

A.N : $T_c = 1421^\circ \text{C}$

On a : $\left(\frac{dT}{dr} \right) (r = R) = -\frac{\rho H R}{3\lambda} - \frac{C}{R^2}$

A.N : $\left(\frac{dT}{dr} \right) (r = R) = -3,1 \cdot 10^{-2} \text{ K.m}^{-1} = -31 \text{ K.km}^{-1}$



f- $\Phi = -\lambda \left(\frac{dT}{dr} \right) (r = R) 4\pi R^2$ A.N : $\Phi = 6,3 \cdot 10^{13} \text{ W}$

$\phi = \frac{\Phi}{4\pi R^2}$ A.N : $\phi = 0,12 \text{ W.m}^{-2}$