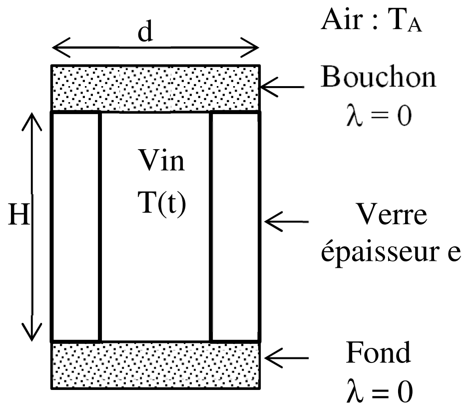
3.3 Diffusion thermique-Exercice 25

Une bouteille de vin, choisie dans la cave à une température de T_0 = 8°C, est mise en « chambre » dans la cuisine où la température vaut T_A = 22°C
La bouteille est assimilée à un cylindre de hauteur H = 19,5 cm, de diamètre d = 7,6 cm et d'épaisseur e = 3 mm.
La température T(t) du vin est supposée uniforme mais dépend lentement du temps. En revanche, la température du verre est fonction de la coordonnée cylindrique radiale r et le régime est quasi-stationnaire.

Données : conductivité thermique du verre λ = 0,78 $W.m^{-1}.K^{-1}$
capacité thermique massique du vin c = 4 $kJ.K^{-1}.kg^{-1}$
coefficient d'échange convectif h = 10 S.I



a-Exprimer le flux thermique Φ qui traverse la bouteille. Quelle propriété a-t-il en régime (quasi) stationnaire ? En déduire la résistance thermique R_{cond} de conduction de la partie latérale de la bouteille, en notant T_S la température de surface de la bouteille. Application numérique.

b-L'échange thermique par convection entre l'air ambiant et la bouteille est décrit par la loi de Newton $\varphi = hS(T_S - T_A)$ où φ est le flux thermique dans l'air. Quelle est l'unité de h ? De quoi dépend h ? Exprimer et calculer la résistance thermique de convection R_{conv} de la surface latérale de la bouteille.

c-Comparer les deux flux Φ et φ. En déduire la valeur numérique de la résistance thermique totale R_{th}.

d-Faire le bilan énergétique du vin entre t et t + dt. En déduire une équation différentielle en T(t).

e-Déterminer et représenter graphiquement T(t) . Calculer le temps nécessaire pour que le vin atteigne sa température optimale de dégustation T_D = 16°C. Quelle est à cet instant la température de surface T_S ?

3.3 Diffusion thermique-Exercice 25

---

a- $\boxed{\Phi = \iint_{\substack{\text{surface latérale} \\ \text{cylindre rayon r}}} \vec{j}_Q . d\vec{S} = j_Q(r).2\pi rH}$ En régime stationnaire ce flux se conserve , il est indépendant de r.

Avec la loi de Fourier : $\Phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi rH$ => $dT = -\frac{\Phi dr}{2\pi\lambda Hr}$ => $T_S - T(t) = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda H} \mathrm{Ln} \frac{\frac{d}{2}}{\frac{d}{2} - e}$

Par définition : $T(t) - T_S = R_{cond}\Phi$ d'où : $\boxed{R_{cond} = \frac{1}{2\pi\lambda H} \mathrm{Ln} \frac{d}{d-2e}}$ A.N : $R_{cond} = 8{,}6.10^{-2}$ K.W^{-1}

b- h est en W.m^{-2}.K^{-1} Par définition : $T_S - T_A = R_{conv}\varphi$ d'où : $\boxed{R_{conv} = \frac{1}{hS} = \frac{1}{h\pi dH}}$ A.N : $R_{conv} = 2{,}15$ K.W^{-1}

c-$\Phi = \varphi$ car toute la puissance thermique qui rentre dans la bouteille provient de l'air.
Les deux résistances sont donc en série : $R_{th} = R_{cond} + R_{conv} = 2{,}23$ K.W^{-1}

d-Premier principe au vin entre t et t+dt : $dU = \delta Q_{air \to vin}$

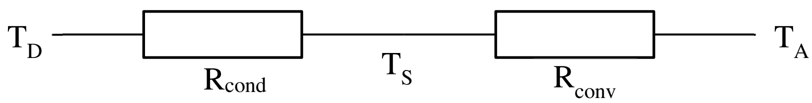
donc : $mcdT = -\Phi dt = -\frac{T(t) - T_A}{R_{th}} dt$ soit $\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{T(t)}{mcR_{th}} = \frac{T_A}{mcR_{th}}}$

La constante de temps est $\tau = mcR_{th}$ avec $m = \mu\pi(d/2 - e)^2 H = 0{,}75$ kg

e-Solution : $T(t) = Ae^{-t/\tau} + T_A$ A t = 0 : $T(0) = T_0 = A + T_A$ Donc : $\boxed{T(t) = (T_0 - T_A)e^{-t/\tau} + T_A}$

On cherche t_D tel que : $T_D = (T_0 - T_A)e^{-t/\tau} + T_A$ d'où : $\boxed{t_D = -\tau \mathrm{Ln} \frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}}$ A.N : $t_D = 5682$ s = 1h35 min

Schéma électrique équivalent :



Par la formule du diviseur de tension : $T_S - T_A = \frac{R_{conv}}{R_{cond} + R_{conv}} (T_D - T_A)$

A.N : $T_S = 16{,}2$ °C
