

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARRÉES

Cours

Notations du chapitre :

- ▶ $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
- ▶ E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,
- ▶ n désigne un entier naturel non nul,
- ▶ u désigne un endomorphisme de E ,
- ▶ A désigne une matrice carrée d'ordre n (c'est-à-dire à n lignes et n colonnes) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Sauf mention du contraire, E est supposé de dimension *finie* n .

But : Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est « la plus simple possible » pour faciliter les calculs. On va notamment étudier à quelles conditions on peut obtenir une matrice diagonale ou triangulaire.

I. ÉLÉMENTS PROPRES

A. DÉFINITIONS

Si la matrice de u dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est diagonale, elle s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

On a donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $e_i \neq 0_E$ (car c'est un vecteur d'une famille libre). D'où l'intérêt de l'étude des *éléments propres*.

Définition 1 (*Éléments propres d'un endomorphisme*)

Les trois premières définitions sont valables même si E n'est pas de dimension finie.

- ▶ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre* de u lorsqu'il existe un vecteur x de E non nul tel que $u(x) = \lambda x$.
- ▶ Soit $x \in E$. On dit que x est un *vecteur propre* de u lorsque x est non nul et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
On dit alors que x est un *vecteur propre associé* à la *valeur propre* λ .
- ▶ Lorsque λ est une valeur propre de u , on appelle *sous-espace propre* de u associé à la *valeur propre* λ et on note E_λ (ou $E_\lambda(u)$) le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E).$$

E_λ est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul 0_E .

- ▶ On appelle *spectre* de u et on note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u .

On appelle *équation aux éléments propres* l'équation $u(x) = \lambda x$.

C'est cette équation qu'il faut étudier pour déterminer *les éléments propres de u* (c'est-à-dire ses valeurs propres et vecteurs propres/sous-espaces propres).

Plus précisément :

- Les valeurs propres de u sont les scalaires λ pour lesquels l'équation $u(x) = \lambda x$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution non nulle.
- Pour λ une valeur propre fixée, le sous-espace propre de u associé à λ est l'ensemble-solution de l'équation $u(x) = \lambda x$ d'inconnue $x \in E$.
- Pour λ une valeur propre fixée, les vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ sont les solutions non nulles de l'équation $u(x) = \lambda x$ d'inconnue $x \in E$.

Exemple 1 :

1. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, u(x, y) = (2x - y, x + 4y).$$

Déterminer les éléments propres de u .

2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = XP'$.

Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, X^k est un vecteur propre de u .

Déterminer le spectre de u .

3. Soit T l'endomorphisme de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par : $\forall f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), T(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$.

Montrer que T n'admet pas de valeur propre.

Proposition 2

L'espace vectoriel E n'est pas supposé de dimension finie.

Soit $x \in E$.

$\text{Vect}(x)$ est une droite stable par u si et seulement si x est un vecteur propre de u .

Définition 3 (Éléments propres d'une matrice)

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre de A* lorsqu'il existe un vecteur-colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On dit que X est un *vecteur propre de A* lorsque X est non nul et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$.
- Lorsque λ est une valeur propre de A , on appelle *sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ* et on note E_λ (ou $E_\lambda(A)$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X\} = \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

E_λ est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul $0_{n,1}$.

- On appelle *spectre de A* et on note $\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A .

On appelle *équation aux éléments propres* l'équation $AX = \lambda X$.

C'est cette équation qu'il faut étudier pour déterminer *les éléments propres de A* (c'est-à-dire ses valeurs propres et vecteurs propres/sous-espaces propres).

Plus précisément :

- Les valeurs propres de A sont les scalaires λ pour lesquels l'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet au moins une solution non nulle.
- Pour λ une valeur propre fixée, le sous-espace propre de A associé à λ est l'ensemble-solution de l'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Pour λ une valeur propre fixée, les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ sont les solutions non nulles de l'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 2 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer ses éléments propres sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Proposition 4 (*Liens endomorphismes/matrices*)

- Notons φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \varphi_A(X) = AX.$$

Alors la matrice A et l'endomorphisme φ_A ont les mêmes éléments propres.

- Soit $\mathcal{B}$ une base de E .
Alors l'endomorphisme u et la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ ont les mêmes valeurs propres et leurs sous-espaces propres sont reliés par la correspondance vectoriel / matriciel.

Tous les énoncés concernant les endomorphismes seront vrais en particulier pour l'endomorphisme φ_A et ils pourront donc être reformulés (sans preuve) pour une matrice A .

Exemple 3 : Montrer que deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

B. CARACTÉRISATION DES VALEURS PROPRES

Proposition 5 (*Caractérisation des valeurs propres pour $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $n = \dim(E)$*)

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par le théorème du rang, on a $\dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)) = n - \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E)$.
- Les assertions suivantes sont équivalentes :
 - λ est une valeur propre de u
 - L'équation $u(x) = \lambda x$ d'inconnue $x \in E$ admet des solutions non nulles
 - $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$
 - $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injective
 - $\text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq n$
 - $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas surjective
 - $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas bijective (c'est-à-dire n'est pas un automorphisme)
 - $\det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$

Les 4 premières assertions sont équivalentes même si E n'est pas de dimension finie.

Proposition 6 (*Caractérisation des valeurs propres pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)

- ▶ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par le théorème du rang, on a $\dim(\text{Ker}(A - \lambda I_n)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$.
- ▶ Les assertions suivantes sont équivalentes :
 - i. λ est une valeur propre de A
 - ii. L'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet des solutions non nulles
 - iii. $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$
 - iv. $\text{rg}(A - \lambda I_n) \neq n$
 - v. $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible
 - vi. $\det(A - \lambda I_n) = 0$

On notera particulièrement ces équivalences dans le cas $\lambda = 0$.

- ★ $[0 \text{ est une valeur propre de } u] \Leftrightarrow [\text{Ker}(u) \neq \{0_E\}] \xLeftrightarrow[\dim(E) \text{ finie}] [u \text{ n'est pas un automorphisme}]$
- ★ $[0 \text{ est une valeur propre de } A] \Leftrightarrow [\text{rg}(A) \neq n] \Leftrightarrow [A \text{ n'est pas inversible}] \Leftrightarrow [\det(A) = 0]$

Exemple 4 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Exemple 5 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer sans calcul trois valeurs propres de la matrice A et donner une base des sous-espaces propres associés.

C. UTILISATION DES POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES/DE MATRICES

Proposition 7 (*Pour $u \in \mathcal{L}(E)$*)

- ▶ Soit $x \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Si $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- ▶ Soit P un polynôme annulateur de u .
Si λ est une valeur propre de u alors λ est une racine de P .

Proposition 8 (*Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)

- ▶ Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Si $AX = \lambda X$ alors $P(A)X = P(\lambda)X$.
- ▶ Soit P un polynôme annulateur de A .
Si λ est une valeur propre de A alors λ est une racine de P .

Attention, la réciproque du deuxième point est fautive en général.

Retenir que si l'on dispose d'un polynôme annulateur, les valeurs propres se trouvent parmi les racines du polynôme mais les racines du polynôme ne sont pas forcément toutes des valeurs propres.

Exemple 6 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Montrer que si λ est une valeur propre de A alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$ et on a de plus $E_\lambda(A) \subset E_{P(\lambda)}(P(A))$.

Application 1 : Soit $k \in \mathbb{N}$.

Montrer que si λ est une valeur propre de A alors λ^k est une valeur propre de A^k et $E_\lambda(A) \subset E_{\lambda^k}(A^k)$.

Application 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

Montrer que $\text{Sp}(A + \alpha I_n) = \{\lambda + \alpha, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ et que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $E_{\lambda+\alpha}(A + \alpha I_n) = E_\lambda(A)$.

Exemple 7 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer un polynôme annulateur de J et en déduire les valeurs propres de J .

Exemple 8 : Déterminer les valeurs propres d'un projecteur et d'une symétrie.

D. POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Quelques rappels

► Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(P) = n \geq 1$.

On dit que P est *scindé sur $\mathbb{K}$* lorsqu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ (non nécessairement distincts) et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que :

$$P = \alpha \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

P est scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement s'il possède n racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur multiplicité.

Exemple : Les polynômes $X^3 - 1$ et $X^2 - 2X + 1$ sont-ils scindés sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

► *Théorème de d'Alembert :* Tout polynôme non constant est scindé sur $\mathbb{C}$.

1. DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition/Proposition 9 (Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

On note χ_A l'application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

χ_A est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ appelé *le polynôme caractéristique de A* .

On peut écrire $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Proposition 10

χ_A est un polynôme unitaire de degré n , son coefficient de degré $n - 1$ est $-\text{tr}(A)$ et son coefficient de degré 0 est $(-1)^n \det(A)$.

En particulier, pour $n = 2$, on a $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A)$.

Définition/Proposition 11

- Les racines de χ_A sont les valeurs propres de A .
- On appelle *ordre de multiplicité* d'une valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_A . On le notera m_λ .

Exemple 9 : Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire les valeurs propres de A et leur ordre de multiplicité.

Exemple 10 : Montrer qu'une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique. Qu'en déduit-on sur leurs éléments propres ?

Définition/Proposition 12 (Pour $u \in \mathcal{L}(E)$)

On note χ_u l'application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_u(\lambda) = \det(\lambda \text{Id}_E - u).$$

χ_u est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ appelé *le polynôme caractéristique de u* .

Proposition 13 (Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $n = \dim(E)$)

χ_u est un polynôme unitaire de degré n , son coefficient de degré $n - 1$ est $-\text{tr}(u)$ et son coefficient de degré 0 est $(-1)^n \det(u)$.

Définition/Proposition 14

- Les racines de χ_u sont les valeurs propres de u .
- On appelle *ordre de multiplicité* d'une valeur propre λ son ordre de multiplicité en tant que racine de χ_u . On le notera m_λ .

Proposition 15 (Lien endomorphismes/matrices)

- Soit $\mathcal{B}$ une base de E .
L'endomorphisme u et la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ ont le même polynôme caractéristique.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

2. CONSÉQUENCES POUR LES VALEURS PROPRES

Corollaire 16

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et la multiplicité de chaque valeur propre est égale au nombre de fois où elle apparaît sur la diagonale.

Corollaire 17

- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet exactement n valeurs propres complexes comptées avec leurs multiplicités.
- Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités.
Ses valeurs propres complexes non réelles sont conjuguées deux à deux et une valeur propre complexe et son conjugué ont même multiplicité.

► Notons que toute matrice admet donc au moins une valeur propre complexe et donc au moins un vecteur propre à coefficients complexes associé.

► Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a donc pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, $\bar{\lambda} \in \text{Sp}(A)$ et on a de plus $E_{\bar{\lambda}} = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_{\lambda} \right\}$.

Exemple 5 (suite) : Déterminer sans calcul les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Corollaire 18

- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n admet exactement n valeurs propres (complexes) comptées avec leurs multiplicités.
- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n admet au plus n valeurs propres (réelles) comptées avec leurs multiplicités.

Proposition 19 (Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $n = \dim(E)$)

Hyp. : On suppose que le polynôme χ_A (respectivement χ_u) est scindé sur $\mathbb{K}$.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres de A (respectivement u) dans $\mathbb{K}$ (non nécessairement distinctes).

On a alors :

$$\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \text{ et } \det(A) = \prod_{k=1}^n \lambda_k \quad (\text{respectivement } \text{tr}(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \text{ et } \det(u) = \prod_{k=1}^n \lambda_k).$$

On notera que l'hypothèse est toujours vérifiée lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exemple 11 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A + 4I_n = 0_n$.

1. Déterminer $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ puis $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
2. Déterminer χ_A et en déduire $\text{tr}(A)$ et $\det(A)$.

3. THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON

Théorème 20 (Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $n = \dim(E)$)

- Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A : $\chi_A(A) = 0_n$.
- Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n) admet un polynôme annulateur de degré n .

E. PROPRIÉTÉS DES SOUS-ESPACES PROPRES

L'espace vectoriel E n'est pas supposé de dimension finie pour les deux propositions suivantes.

Proposition 21

- Les sous-espaces propres de u (respectivement de A) associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Proposition 22

Soit u et v deux endomorphismes qui commutent c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

- Pour toute valeur propre λ de v , on peut considérer l'endomorphisme induit par u sur $E_{\lambda}(v)$.
- En particulier, tout sous-espace propre de u est stable par u .
De plus, pour λ valeur propre de u , l'endomorphisme induit par u sur E_{λ} est l'homothétie de rapport λ c'est-à-dire $u|_{E_{\lambda}} = \lambda \text{Id}_{E_{\lambda}}$.

Proposition 23

(Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $n = \dim(E)$)

Soit λ une valeur propre de u (respectivement de A).

- On a $\dim(E_{\lambda}) = n - \text{rg}(u - \lambda \text{Id}_E)$ (respectivement $\dim(E_{\lambda}) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$).
- On note m_{λ} l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ .
On a :

$$1 \leq \dim(E_{\lambda}) \leq m_{\lambda}.$$

Corollaire 24 (Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $n = \dim(E)$)

- Si λ est une valeur propre simple (c'est-à-dire $m_\lambda = 1$) alors $\dim(E_\lambda) = 1$.
- La somme des dimensions de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est inférieure ou égale à n .

Exemple 7 (suite) : Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Déterminer les éléments propres de J .

II. DIAGONALISATION

A. DÉFINITIONS

Définition 25

Un endomorphisme de E est dit *diagonalisable* lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Diagonaliser un endomorphisme u de E (où $\dim(E) = n$), c'est déterminer une base $\mathcal{B}$ de E et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $D = \mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exemple 12 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit p un projecteur de E . Montrer que p est diagonalisable et diagonaliser p .
2. Soit s une symétrie de E . Montrer que s est diagonalisable et diagonaliser s .

Définition 26

Une matrice est dite *diagonalisable* lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Diagonaliser une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est déterminer une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exemple 13 : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.

Exemple 14 : Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Proposition 27 (Liens endomorphismes/matrices)

- La matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme $\varphi_A : X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est diagonalisable.
- Soit $\mathcal{B}$ une base de E .
 u est diagonalisable si et seulement si $\mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonalisable.

Théorème 28 (Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $n = \dim(E)$)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i. u est diagonalisable.
- ii. Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .
- iii. $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda$
- iv. $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda) = n$
- v. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

Une fois la diagonalisabilité de u prouvée, pour diagonaliser u :

- On détermine une base de chaque sous-espace propre et on les concatène.
On obtient ainsi une base de E puisque $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda$.
- Dans cette base, la matrice de u est diagonale et sa diagonale contient les valeurs propres de u , chacune apparaissant autant de fois que la dimension de son sous-espace propre (et dans le même ordre que celui choisi lors de la concaténation des bases).

Corollaire 29 (Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $n = \dim(E)$)

Si u admet n valeurs propres toutes distinctes alors u est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

- L'endomorphisme u admet n valeurs propres toutes distinctes si et seulement si χ_u est scindé à racines simples.
- Attention, un endomorphisme diagonalisable n'admet pas nécessairement n valeurs propres distinctes.

Théorème 30 (Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i. A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
- ii. Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A .
- iii. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} E_\lambda$
- iv. $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim(E_\lambda) = n$
- v. χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

Une fois la diagonalisabilité de A prouvée, pour diagonaliser A :

- ▶ On détermine une base de chaque sous-espace propre et on les concatène.
On obtient ainsi une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puisque $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda$. Notons-la $\mathcal{B}$.
- ▶ On note P la matrice dont les colonnes sont les éléments de $\mathcal{B}$: P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
On note D la matrice diagonale contenant les valeurs propres de A , chacune apparaissant autant de fois que la dimension de son sous-espace propre (et dans le même ordre que celui choisi lors de la concaténation des bases).
On a alors $A = PDP^{-1}$ (car A est la matrice de φ_A dans la base canonique, D la matrice de φ_A dans la base $\mathcal{B}$ et P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$).

Corollaire 31 (*Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)

Si A admet n valeurs propres toutes distinctes dans $\mathbb{K}$ (ou de façon équivalence si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples) alors A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Exemple 15 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$? Si oui, la diagonaliser.

Exemple 16 : Soit deux réels a et b distincts.

Trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ soit diagonalisable et pour ces triplets, diagonaliser A .

C. UTILISATION DES POLYNÔMES ANNULATEURS

Théorème 32 (*Pour $u \in \mathcal{L}(E)$*)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est diagonalisable.
- $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u .
- u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Théorème 33 (*Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*)

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
- $\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de A .
- A admet un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

Précisons que $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$ si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ désignent les p valeurs propres distinctes de u .

Exemple 17 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M^T = 2I_n$.

Montrer que M est diagonalisable.

Corollaire 34

Soit F un sous-espace vectoriel de E , stable par u .

Si u est diagonalisable alors l'endomorphisme $u|_F$ induit par u sur F est diagonalisable.

Exemple 18 : Soit u et v deux endomorphismes de E .

On suppose que u et v commutent et qu'ils sont tous deux diagonalisables.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales.

On termine par un résultat qui sera démontré dans le cours ESPACES EUCLIDIENS.

Proposition 35

Toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Attention, ce n'est plus vrai pour une matrice symétrique à coefficients complexes.

D. APPLICATIONS

Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alors on note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Les calculs avec une matrice diagonale sont simples.

On a notamment :

$$\text{Pour tout } Q \in \mathbb{K}[X], \quad Q(D) = \text{diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)).$$

Proposition 36

S'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$ alors pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(A) = P \text{diag}(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) P^{-1}$.

Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k = P \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1}$.

Exemple 19 : Application à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3

On souhaite déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2} \quad (\mathcal{R}).$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vérifie } (\mathcal{R}) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n.$$

2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $(\mathcal{R})$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Montrer que la matrice A est diagonalisable et la diagonaliser.
4. En déduire l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation $(\mathcal{R})$.

III. TRIGONALISATION

A. DÉFINITIONS

Définition 37

Un endomorphisme de E est dit *trigonalisable* lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Si la matrice de u est triangulaire supérieure dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ alors sa matrice dans la base $(e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ est triangulaire inférieure.

On choisira habituellement de travailler avec des matrices triangulaires supérieures.

Trigonaliser un endomorphisme u de E (où $\dim(E) = n$), c'est déterminer une base $\mathcal{B}$ de E et une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que $T = \mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Notons que dans ce cas, comme $\chi_T = \chi_u$, les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de u apparaissant autant de fois que leur multiplicité.

Définition 38

Une matrice est dite *trigonalisable* lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire.

Trigonaliser une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est déterminer une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$.

Notons que dans ce cas, comme $\chi_T = \chi_A$, les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A apparaissant autant de fois que leur multiplicité.

Proposition 39 (Liens endomorphismes/matrices)

- ▶ La matrice A est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme $\varphi_A : X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est trigonalisable.
- ▶ Soit $\mathcal{B}$ une base de E .
 u est trigonalisable si et seulement si $\mathcal{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est trigonalisable.

B. CRITÈRE DE TRIGONALISATION

Théorème 40

Un endomorphisme / une matrice est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

- ▶ En particulier, tout endomorphisme / toute matrice est trigonalisable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- ▶ On peut utiliser ce théorème pour proposer une nouvelle preuve de la *Proposition 19*.

Exemple 20 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

Si oui, la diagonaliser/trigonaliser.