

## RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARRÉES

### Exercices

**1** Déterminer les éléments propres des matrices suivantes sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

**2** Déterminer les valeurs propres de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**3** Soit  $E$  l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et  $\Delta : E \rightarrow E$  l'endomorphisme qui à toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $E$  associe la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Déterminer les valeurs propres de  $\Delta$ .

**4** Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$  défini par  $\varphi(M) = M^T$ .

Déterminer un polynôme annulateur de  $\varphi$  et en déduire les éléments propres de  $\varphi$ .

**5** Soit  $L$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par  $L(P) = X^3 P\left(\frac{1}{X}\right)$ .

Déterminer la matrice de  $L$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

Donner les éléments propres de  $L$ .

**6** Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  tel que tout vecteur non nul en est vecteur propre. On souhaite montrer que  $u$  est une homothétie vectorielle.

1. Montrer que pour tout  $x \in E$  non nul, il existe un scalaire  $\lambda_x$  tel que  $u(x) = \lambda_x x$ .
2. Comparer  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  pour  $x$  et  $y$  deux vecteurs non nuls.  
*On pourra considérer les cas : la famille  $(x, y)$  est liée et la famille  $(x, y)$  est libre.*
3. Conclure.

**7** Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ .

1. Soit  $\lambda$  une valeur propre non nulle de  $u \circ v$ . Montrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $v \circ u$ .
2. Montrer que cette propriété reste valable pour  $\lambda = 0$  si  $E$  est de dimension finie.
3. On pose  $E = \mathbb{R}[X]$  et pour tout  $P \in E$ ,  $u(P) = P'$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $v(P)(x) = \int_0^x P(t) dt$ .  
Calculer le noyau de  $u \circ v$  et celui de  $v \circ u$ . Conclusion ?

**8** Matrices stochastiques

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On suppose que pour tout  $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} \geq 0$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ .

1. Montrer que  $1 \in \text{Sp}(A)$ .
  2. Justifier que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est valeur propre de  $A$  alors  $|\lambda| \leq 1$ .
  3. On suppose de plus que tous les coefficients de  $A$  sont non nuls.  
Montrer que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est valeur propre de  $A$  qui vérifie  $|\lambda| = 1$  alors  $\lambda = 1$ .
- 

**9** Soit  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

En multipliant à droite et à gauche la matrice  $\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$  par des matrices triangulaires par blocs bien choisis, montrer l'égalité des polynômes caractéristiques :  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .

---

**10** Soit  $(A, B, C, D) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^4$  tel que  $AC = CA$ .

On souhaite montrer que  $\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$ .

1. On suppose dans cette question que  $A$  est inversible.  
Effectuer le produit par blocs  $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}C \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$  et en déduire le résultat souhaité.
  2. On revient au cas général.
    - (a) Montrer que pour  $p$  assez grand, la matrice  $A_p = A + \frac{1}{p}I_n$  est inversible.
    - (b) Montrer que si  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  convergeant vers  $M$  alors la suite  $(\det(M_p))_{p \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\det(M)$ .
    - (c) Conclure.
- 

**11** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ . On admet que  $A^4 - 3A^3 + 4A = 0_3$ .

Déterminer les valeurs propres de  $A$ .

---

**12** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  avec  $\alpha \neq \beta$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) = 0_n$ . On suppose que  $A$  n'est pas un multiple de  $I_n$ . Montrer que  $\text{Sp}(A) = \{\alpha, \beta\}$ .

---

**13** Déterminer un polynôme annulateur de  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

On suppose que  $A$  est inversible. Déterminer  $A^{-1}$ .

---

**14** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice inversible.

1. Montrer que  $A^{-1}$  est un polynôme en  $A$ .  
*Application* : Montrer que si  $A$  est triangulaire supérieure alors  $A^{-1}$  est triangulaire supérieure.
2. Montrer que  $A$  est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ ,  $A^k$  est triangulaire supérieure.

**15** Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables/trigonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ? dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ? Si oui, les diagonaliser/trigonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$


---

**16** Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$  tels que  $|a| \neq |b|$ .

On considère  $A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$  (avec  $n \geq 2$ ).

1. Justifier que  $A$  est diagonalisable.
  2. Calculer le rang de  $A$ . En déduire que 0 est valeur propre de  $A$  et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
  3. Déterminer deux vecteurs propres associés à deux autres valeurs propres et diagonaliser  $A$ .
- 

**17** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $P_n$  son polynôme caractéristique.

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x)$ .  
Calculer  $P_1$  et  $P_2$ .
  2. Soit  $x \in ]-2, 2[$ . On pose  $x = 2 \cos(\alpha)$  avec  $\alpha \in ]0, \pi[$ .  
Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha}$ .
  3. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n$  admet  $n$  racines et que  $A_n$  est diagonalisable.
- 

**18** *Matrices compagnons*

Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

On appelle *matrice compagnon du polynôme  $P$*  la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de  $M$ .  
(b) Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $M$ .  
Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à  $\lambda$ .  
(c) À quelle condition  $M$  est-elle diagonalisable ?

2. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit *cyclique* lorsqu'il existe  $x \in E$  tel que  $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .
- (a) Montrer qu'un endomorphisme  $u$  est cyclique si et seulement s'il existe une base de  $E$  dans laquelle sa matrice est une matrice compagnon.
- (b) Donner qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.

**19** *Matrices de rang 1*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes  $U$  et  $V$  non nulles de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telles que  $M = UV^T$ .
2. Déterminer un polynôme annulateur de  $M$ .
3. Montrer alors les équivalences :

$$M \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{tr}(M) \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(M) \oplus \text{Im}(M).$$

**20** Soit  $M = \begin{pmatrix} A & A \\ (0) & A \end{pmatrix}$  où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ (0) & P(A) \end{pmatrix}$ .
2. Montrer que  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $A = 0_n$ .

**21** Soit  $p$  un endomorphisme de  $E$ ,  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, tel que  $p^2$  soit un projecteur.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles pour  $p$  ?
2. Montrer que  $p$  est diagonalisable si et seulement si  $p^3 = p$ .

**22** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose  $f(M) = AM$ .

1. Montrer que si  $A^2 = A$  alors  $f$  est diagonalisable.
2. Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable.

**23** *Matrices nilpotentes*

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On dit que la matrice  $A$  est *nilpotente* lorsqu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0_n$ .

1. On suppose que  $A$  est nilpotente.  
Montrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $A = 0_n$ .
2. Montrer que  $A$  est nilpotente si et seulement si pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(A^k) = 0$ .

**24** Les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  sont-elles semblables ?

**25** *Déterminant circulant*

On souhaite calculer le *déterminant circulant*  $\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$ .

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et on pose  $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$ .

1. Montrer qu'il existe  $P \in \mathcal{G}_n(\mathbb{C})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .
2. Montrer que  $\Delta = \det(Q(A))$ .
3. En déduire que  $\Delta = \prod_{p=0}^{n-1} Q(e^{2ip\pi/n})$ .

**26** *Deux applications de la diagonalisation*

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .  
Déterminer  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  inversible et  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .
2. *Application 1 : détermination du commutant*  
Déterminer toutes les matrices qui commutent avec  $A$ .
3. *Application 2 : résolution d'une équation matricielle*  
On souhaite déterminer l'ensemble des matrices  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  vérifiant  $X^2 = A$ .  
Soit  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  vérifiant  $X^2 = A$ .  
On note  $\varphi_X$  (respectivement  $\varphi_A$ ) l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$  canoniquement associé à  $X$  (respectivement à  $A$ ).  
  - (a) Montrer que les sous-espaces propres de  $\varphi_A$  sont stables par  $\varphi_X$ .
  - (b) En déduire que tout vecteur propre de  $\varphi_A$  est un vecteur propre de  $\varphi_X$ .
  - (c) Montrer que la matrice  $P^{-1}XP$  est diagonale.  
Quelles sont les valeurs possibles de ses coefficients diagonaux ?

En déduire l'ensemble des matrices  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  vérifiant  $X^2 = A$ .

**27** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$ . On suppose que  $u \circ v = v \circ u$ .

1. Montrer que  $u$  et  $v$  ont un vecteur propre en commun.
2. Montrer alors qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle les matrices de  $u$  et  $v$  sont triangulaires supérieures.

**28** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent.

Montrer qu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $P^{-1}AP$  et  $P^{-1}BP$  soient diagonales.

**29** Existe-t-il une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constituée de matrices diagonalisables dans  $\mathbb{R}$  ?