
DM5 (SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS)

Pour le jeudi 20 novembre

PROBLÈME 1 (CCINP) : SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π .

Dans ce qui suit, on appelle « série trigonométrique » une série de fonctions du type

$$\sum (a_n C_n + b_n S_n)$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels et où pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions C_n et S_n sont définies par :

$$C_n : x \mapsto \cos(nx) \quad \text{et} \quad S_n : x \mapsto \sin(nx).$$

Dans la première partie, on étudie quelques exemples.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx.$$

PARTIE 1 : EXEMPLES

1. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2^n} C_n + \frac{1}{3^n} S_n \right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{e^{ix}}{p} \right)^n$ puis en déduire la valeur pour tout $x \in \mathbb{R}$ de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cos(nx) + \frac{1}{3^n} \sin(nx) \right)$$

(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

3. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} S_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?
4. Écrire la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(\cos x) \cos(\sin x)$ comme la somme d'une série trigonométrique.
On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme la somme d'une série de fonctions.

Une condition suffisante

5. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors la série trigonométrique $\sum(a_n C_n + b_n S_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques.
Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a \cos(x) + b \sin(x)|$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.
7. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum(a_n C_n + b_n S_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

8. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n C_n + b_n S_n)$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$.
9. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx$ pour k et n entiers.

10. Dans cette question uniquement, on note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n C_n + b_n S_n)$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x , $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.

Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0 .

On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx = 0$.

On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

11. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Pour tout réel x , on pose :

$$u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} \text{ et pour tout } n \geq 1, u_n(x) = \alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx).$$

On suppose ici que la série trigonométrique $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la fonction g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k(f) \cos(kx) + \beta_k(f) \sin(kx)).$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

12. Il est admis que si une fonction $h \in \mathcal{C}_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n , $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$ alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x , $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)C_n + \beta_n(f)S_n)$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x , on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n(f) \cos(nx) + \beta_n(f) \sin(nx))$$

13. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$?
Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$.
14. *Exemple.* Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ définie par : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.

Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$.

Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f .

15. En déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Déduire alors de la seconde somme la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

16. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?

Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum (a_n C_n + b_n S_n)$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$, soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

17. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n} C_n$.

PROBLÈME 2 (CENTRALE) : PRODUITS INFINIS

Notations

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés.

- La partie I permet d'obtenir des résultats qui seront utilisés dans tout le problème.
- La partie II étudie quelques exemples de calcul de produit infini, dont celui de Wallis, et donne par ailleurs une illustration en probabilités.
- La partie III permet de montrer, sous certaines conditions, la continuité ou le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction définie par un produit infini de fonctions.
- La partie IV a pour but d'exprimer la fonction sinus sous forme de produit infini et, en s'appuyant sur la partie III, d'en tirer quelques conséquences.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $[t]$ la partie entière de t .

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^n u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n \geq p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod_{n \geq p} u_n$.

Si la suite $(P_n)_{n \geq p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n.$$

I. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Q 1. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

Q 2. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n x_k \right).$$

I.B – Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^z .

Q 3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$|(1+t) - e^t| \leq |t|^2 e^{|t|}.$$

Q 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.
Montrer que $|a^n - b^n| \leq nM^{n-1}|a - b|$.

Q 5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| \leq \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}$.

Q 6. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e^z .

II. EXEMPLES DE CALCUL DE PRODUIT INFINI

II.A –

Q 7. Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$.

On pourra, pour tout $N \geq 2$, établir une expression de $\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ et $\prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$.

II.B – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n du.$$

Q 8. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Q 9. Déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1} \right)$.

II.C – Les deux questions suivantes sont réservées aux 5/2.

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants tels que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

Q 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\prod_{p=n}^{+\infty} (1 - \mathbb{P}(A_p)) = 0$.

On pourra utiliser l'inégalité démontrée en Q 2.

Q 11. En déduire que $\mathbb{P} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p \right) = 1$.

III. ETUDE D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UN PRODUIT INFINI

On considère dans cette partie :

- a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.
- $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $] -1, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + f_k(x)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + |f_k(x)|), \quad \text{et sous conditions d'existence } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|.$$

III.A – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction R_0 .

Q 12. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq e^M |f_{n+1}(x)|.$$

Q 13. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

Q 14. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P définie sur $\mathcal{S}$ par :

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$

Q 15. Montrer que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

III.B – Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-nx^2})$.

Q 16. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q 17. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

III.C – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que :

- la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.
- la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{f'_n}{1 + f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

Q 18. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$,

$$P'_n(x) = P_n(x) \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(x)}{1 + f_k(x)}.$$

Q 19. En déduire que la fonction

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x)) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ et que

$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f'_n(x)}{1 + f_n(x)}.$$

IV. EXPRESSION DE LA FONCTION SINUS COMME PRODUIT INFINI

IV.A – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \frac{1}{2i} \left(\left(1 + \frac{iX}{2n+1} \right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iX}{2n+1} \right)^{2n+1} \right).$$

Dans les questions Q20 à Q23, on fixe un entier naturel n .

Q 20. Montrer que P_n est un polynôme de degré $2n+1$.

Q 21. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on note $x_k = (2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\{x_k \mid k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket\}$.

Q 22. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P_n(X) = \lambda X \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2} \right).$$

Q 23. En calculant $P'_n(0)$, montrer que :

$$P_n(X) = X \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2} \right).$$

Q 24. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinus.

IV.B – Dans cette sous-partie, on fixe un réel x et on considère la suite de fonctions $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, v_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} x \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2[t]+1}\right) (2[t]+1) \right)^2} \right) & \text{si } t \geq k \\ P_{[t]}(x) & \text{si } t < k. \end{cases} \end{cases}$$

Q 25. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$,

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| \leq \frac{x^2}{k^2 \pi^2} |v_{k-1}(t)|.$$

Q 26. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|v_k(t)| \leq |x| \exp\left(\sum_{j=1}^k \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

Q 27. En déduire que la série de fonctions $\sum_{k \geq 2} (v_k - v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Q 28. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v_k(t)$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k(t)$.

Q 29. En déduire que :

$$\sin(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right).$$

IV.C –

Q 30. Montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$,

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2x}{(j\pi)^2 - x^2}.$$

Q 31. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On pourra dans un premier temps déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2 \sin(x)}$.