

PROBLÈME

On note respectivement χ_M et χ_u les polynômes caractéristiques d'une matrice carrée M de taille n et d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Q1. Ce sont des résultats de cours. Donnons des justifications raisonnables en termes de longueur.

Soit $(A, B, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \times \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PBP^{-1}$ (A et B sont semblables).

Par propriété de la trace, on a $\text{tr}(A) = \text{tr}((PB)P^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PB) = \text{tr}(B)$.

Par multiplicativité du déterminant et comme $\det(P) \neq 0$, on peut écrire que :

$$\det(A) = \det(P) \det(B) \det(P^{-1}) = \det(P) \det(B) \frac{1}{\det(P)} = \det(B).$$

De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det(P(\lambda I_n)P^{-1} - PBP^{-1}) = \det(P) \det(\lambda I_n - B) \frac{1}{\det(P)} = \chi_B(\lambda).$$

On en déduit que le polynôme $\chi_A - \chi_B$ admet une infinité de racines, donc que $\chi_A - \chi_B = 0_{\mathbb{R}[X]}$, puis $\chi_A = \chi_B$.

Le rang d'une matrice carrée est invariant par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible, donc $\text{rang}(B) = \text{rang}(PB) = \text{rang}(PBP^{-1}) = \text{rang}(A)$.

Q2. Comme déterminants et polynômes caractéristiques de matrices triangulaires supérieures obtenus par produit des éléments diagonaux, on a $\det(A) = 4 = \det(B)$ – en particulier, $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 3$ car A et B sont inversibles – et $\chi_A = (X-2)^2(X-1) = \chi_B$. On a aussi directement $\text{tr}(A) = 5 = \text{tr}(B)$. Comme la seule valeur propre non-simple de A et B est 2 (qui est une valeur propre double), l'une de ces matrices est diagonalisable *si et seulement si* le rang de cette matrice moins $2I_3$ est 1. Or, $A - 2I_3$ est visiblement de rang 1 car toutes ses colonnes sont identiques (donc colinéaires), alors que $B - 2I_3$ possède deux colonnes non colinéaires (la première et la dernière) : elle est de rang au moins 2 (et même exactement 2, car la deuxième est nulle). Ainsi, A est diagonalisable, donc semblable à $\text{diag}(1, 2, 2)$; en revanche, B n'est pas diagonalisable. En raisonnant par l'absurde et en vertu de la transitivité de la relation de similitude, si B était semblable à A , elle serait aussi diagonalisable, ce qui n'est pas le cas. Contradiction. En définitive, A et B ne sont pas semblables.

On sait que A est diagonalisable, de spectre $\{1, 2\}$, donc son polynôme minimal est $(X-1)(X-2)$, scindé à racines simples. Comme B n'est pas diagonalisable et a même spectre, son polynôme minimal est un multiple unitaire de $(X-1)(X-2)$ de degré strictement supérieur à deux, qui divise son polynôme caractéristique $(X-1)(X-2)^2$: c'est donc $(X-1)(X-2)^2$. Ainsi, A et B n'ont pas même polynôme minimal.

Q3. *Première méthode :* En notant $\epsilon_1 = e_2$, $\epsilon_2 = e_1$ et $\epsilon_3 = e_3$, on a $u(\epsilon_1) = \epsilon_2 + \epsilon_3$, $u(\epsilon_2) = \epsilon_1 + 2\epsilon_3$ et $u(\epsilon_3) = \epsilon_2$, donc $\text{Mat}_{(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)}(u) = B$. Ainsi, A et B représentent le même endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans deux bases différentes : A et B sont semblables.

Deuxième méthode : En développant les déterminants correspondants (en employant au besoin la règle de Sarrus), on obtient que $\chi_A = \chi_B = X^3 - 3X - 1$. La fonction $t \mapsto t^3 - 3t - 1$ est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto 3(t^2 - 1)$, dont les zéros sont -1 et 1 . On en déduit le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$\chi'_A(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\chi_A(t)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la restriction strictement monotone de $t \mapsto \chi_A(t)$ à $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ et $] 1, +\infty[$ – d'images respectives $] -\infty, 1[$, $] -3, 1[$ et $] -3, +\infty[$ contenant toutes 0 –, $t \mapsto \chi_A(t)$ s'annule exactement trois fois sur $\mathbb{R}$: χ_A admet trois racines réelles distinctes, notées α , β et γ . Ce polynôme est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que A et B sont diagonalisables et toutes deux semblables à $\text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$. Par transitivité de la relation de similitude, A et B sont semblables.

Q4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1, d'endomorphisme canoniquement associé $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème du rang, $\ker(A)$ est de dimension $n - 1$.

Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\ker(A)$. On la complète – d'après le théorème de la base incomplète – en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Le vecteur $u(e_n)$ se décompose de manière unique dans $\mathcal{B}$ sous la forme $u(e_n) = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, car $u(e_n) \neq 0$, sans quoi u serait nul. Il est alors immédiat que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = U$ (avec les notations de l'énoncé).

Q5. *Application* : On conserve les notations de la question précédente en choisissant une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice U de u est de la forme précédente. C'est possible, car la matrice de u dans une base quelconque est encore de rang 1 : elle est semblable, d'après la question précédente à U ; on sait alors qu'il existe une base $\mathcal{B}$ convenable.

Un calcul direct donne $U^2 = a_n U$. Comme $U^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ par hypothèse ($u \circ u \neq 0$), on a $a_n \neq 0$. Ainsi, $X^2 - a_n X = X(X - a_n)$ est un polynôme annulateur de U , donc de u , scindé à racines simples. On sait alors que u est diagonalisable.

Q6. Donnons un contre-exemple. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique. Son polynôme caractéristique est X^2 d'unique racine 0, donc $\text{Sp}(C) = \{0\}$.

Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle, ce qui n'est visiblement pas le cas.

Q7. La famille des colonnes de A est engendrée par $\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \right)$. Ainsi, A est de rang au plus deux.

Comme $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ au moins l'une de ces colonnes est non nulle : A est de rang au moins 1. Enfin, A est de rang 1 *si et seulement si* ces deux colonnes sont proportionnelles, c'est-à-dire *si et seulement si* il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \lambda\beta$ et $\beta = \lambda\alpha$. Si A est de rang 1, on a donc $\lambda^2\alpha = \alpha$, d'où $\lambda \in \{-1, 1\}$ car $\alpha \neq 0$: c'est exclu par hypothèse (α et β ne sont ni égaux ni opposés). Ainsi, A n'est pas de rang 1 : c'est une matrice de rang 2.

D'après le théorème du rang, $\ker(A)$ est de dimension 2, c'est-à-dire que 0 est valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est de dimension 2. La première (resp. la deuxième) et la troisième (resp. la dernière) colonne de A sont égales. On en déduit que $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0, -1)$ sont des éléments de $\ker(A)$. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre, donc une base de l'espace $\ker(A)$ de dimension 2.

D'après le théorème spectral, la matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable (en base ortho-normée). Exhibons des vecteurs propres associés aux valeurs propres proposées, qui sont non nulles et distinctes par hypothèse sur α et β .

Des calculs matriciels directs donnent que $(1, 1, 1, 1)$ (resp. $(1, -1, 1, -1)$) est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $2(\alpha + \beta)$ (resp. $2(\alpha - \beta)$). Pour $\lambda \in \text{Sp}(A)$, notons $E_\lambda(A)$ l'espace propre de A associé à la valeur propre λ .

On a $4 \leq \dim(E_0(A)) + \dim(E_{2(\alpha+\beta)}(A)) + \dim(E_{2(\alpha-\beta)}(A)) \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) \leq 4$.

L'encadrement implique qu'il y a égalité partout : On a nécessairement $\text{Sp}(A) = \{0, 2(\alpha + \beta), 2(\alpha - \beta)\}$ et $\dim(E_{2(\alpha+\beta)}(A)) = 1 = \dim(E_{2(\alpha-\beta)}(A))$.

On sait alors que la famille $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1), (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de A .

- Q8.** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A . Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de telle sorte que $u(e_1) = \lambda e_1$ et $u(e_2) = \lambda e_2 + a e_1$. On a alors $u(\frac{b}{a}e_2) = \lambda(\frac{b}{a}e_2) + b e_1$. De plus, la matrice de la famille $\mathcal{B}' = (e_1, \frac{b}{a}e_2)$ dans la base canonique est $\text{diag}(1, \frac{b}{a})$ de déterminant $\frac{b}{a} \neq 0$, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est B . On en déduit que A et B sont semblables.
- Q9.** On a $PB = AP$, c'est-à-dire $RB + iSB = AR + iAS$ et, par unicité des parties réelles et imaginaires des coefficients matriciels, $RB = AR$ et $SB = AS$.
- Q10.** Comme R et S sont réelles, la fonction $f : x \mapsto \det(R + xS)$ est à valeurs réelles. C'est aussi une fonction polynomiale, car le déterminant est une application polynomiale en les coefficients matriciels. On peut donc considérer le polynôme P associé, qui est à coefficients réels, mais qu'on peut voir comme un élément de $\mathbb{C}[X]$. Ce polynôme ne s'annule pas en i , car $\det(R + iS) \neq 0$ en vertu du fait que P est inversible : $P \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$. On en déduit que $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, donc que f n'est pas identiquement nulle. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + xS) = P(x) = f(x) \neq 0$, c'est-à-dire que $R + xS$ est inversible.
- Q11.** Par combinaison linéaire et d'après la question 16, on a $(R + xS)B = A(R + xS)$. La matrice $P_0 = R + xS$ est inversible d'après la question 17. On peut donc écrire, en multipliant la relation précédente à gauche par P_0^{-1} , que $B = P_0^{-1}AP_0$, c'est-à-dire que A et B sont semblables (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
- Q12.** *Application* : Le calcul montre que $\chi_B = X^3 + X = X(X - i)(X + i)$. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$. Les matrices A et B sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$ car leur polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Elles sont semblables entre-elles car semblables à la matrice $\text{diag}(0, i, -i)$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. D'après le résultat de la question 18, A et B sont encore semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q13. Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal. Si le polynôme minimal commun est de degré 1, A et B sont des matrices d'homothéties et sont donc égales car leur spectre est le même singleton : elles sont semblables. Supposons désormais que le polynôme minimal commun à A et B soit de degré 2. On peut remarquer que, comme il est unitaire et divise le polynôme caractéristique commun, il coïncide avec celui-ci. L'hypothèse sur le polynôme caractéristique est donc inutile dans ce cas.

- Si χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, alors A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ à la même matrice diagonale à deux éléments diagonaux distincts : elles sont donc semblables entre-elles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donc, d'après la question 18, elles sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Sinon, χ_A admet une racine double dans $\mathbb{C}$, qui est son propre conjugué, car χ_A est un polynôme à coefficients réels. Ainsi, χ_A admet une racine réelle double λ . Il est scindé, donc A et B sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et non diagonalisables (car leur polynôme minimal n'est pas scindé à racines simples : ce n'est pas $X - \lambda$, mais $(X - \lambda)^2$). Ainsi A et B sont respectivement semblables à des matrices de la forme de celles de la question 15. Par transitivité de la relation de similitude, A et B sont semblables.

Q14. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $A^2 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})} = B^2$. Comme A et B ne sont pas des matrices d'homothéties, le polynôme minimal de A et B est X^2 . Elles ont aussi même polynôme caractéristique, qui est X^4 (déterminant triangulaire supérieur). Enfin, A et B ne sont pas semblables car elles ne sont pas de même rang. En effet, A est de rang 2 (deux colonnes non nulles et non colinéaires) et B est de rang 1 (une seule colonne non nulle).