Réduction des endomorphismes Compléments (v2)

Démonstrations

I Éléments propres d'un endomorphisme

I.1 Vecteurs propres et valeurs propres

Propr. • Caractérisations des vecteurs propres

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, x un vecteur **non nul** de E.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) Le vecteur x est un vecteur propre de u : $\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \;/\; u(x) = \lambda\, x$.

2) La famille $\big(x,\ u(x)\big)$ est liée :
$\exists\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \;/\; (\alpha, \beta) \neq (0,0)$ et $\alpha\, x + \beta\, u(x) = 0_E$.

3) La droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u :
$\forall\, y \in \mathrm{Vect}(x),\ \ u(y) \in \mathrm{Vect}(x)$.

4) u induit une homothétie sur $\mathrm{Vect}(x)$:
$\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \;/\; \forall\, y \in \mathrm{Vect}(x),\ \ u(y) = \lambda\, y$.

Démo. Prenons x un vecteur de E **non nul**.
Formalisons les 4 affirmations, en utilisant que $\mathrm{Vect}(x) = \{\alpha\, x\ ;\ \alpha \in \mathbb{K}\}$:

1) $\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \;/\; u(x) = \lambda\, x$;

2) $\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \;/\; (\alpha, \beta) \neq (0,0)$ et $\alpha\, x + \beta\, u(x) = 0_E$
$\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \;/\; (\alpha \neq 0$ **ou** $\beta \neq 0)$ et $\alpha\, x + \beta\, u(x) = 0_E$;

3) $\iff \forall\, y \in \mathrm{Vect}(x),\ \ u(y) \in \mathrm{Vect}(x)$
$\iff \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \ u(\alpha\, x) \in \mathrm{Vect}(x)$
$\iff \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \exists\, \beta_\alpha \in \mathbb{K} \;/\; u(\alpha\, x) = \beta_\alpha\, x$;
Attention ! β_α dépend de α car $\exists\, \beta$ vient après $\forall\, \alpha$.

4) $\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \;/\; \forall\, y \in \mathrm{Vect}(x),\ \ u(y) = \lambda\, y$
$\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \;/\; \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \ u(\alpha\, x) = \lambda\, (\alpha\, x)$.
Ici, λ ne dépend pas de α car $\exists\, \lambda$ vient avant $\forall\, \alpha$.

- **[1⇒2]** Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda\, x$.
  Alors : $\lambda\, x - u(x) = 0_E$ donc le couple $(\alpha, \beta) = (\lambda, -1) \neq (0,0)$ convient.
- **[2⇒1]** Supposons que $\big(x, u(x)\big)$ liée : alors il existe un couple (α, β) de scalaires tels que
  $$(\alpha \neq 0 \ \text{ ou } \ \beta \neq 0) \quad \text{et} \quad \alpha\, x + \beta\, u(x) = 0_E.$$
  - **Cas où $\beta \neq 0$:** $u(x) = -\frac{\alpha}{\beta}\, x$ donc $\lambda := -\frac{\alpha}{\beta}$ convient pour **1**.
  - **Cas où $\beta = 0$:** alors $\alpha \neq 0$ et $\alpha\, x = 0_E$, donc $x = 0_E$,
    ce qui contredit l'hypothèse sur x dans tout le théorème ;
    ce cas ne se produit pas.
- **[1⇒4]** Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda\, x$.
  Prenons $\alpha \in \mathbb{K}$ quelconque. Alors :
  $$u(\alpha\, x) = \alpha\, u(x) = \alpha\, (\lambda\, x) = \lambda\, (\alpha\, x)$$
  et **4** est démontré.
- **[4⇒3]** Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \ u(\alpha\, x) = \lambda\, (\alpha\, x)$.
  Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ quelconque ; alors $u(\alpha\, x) = \lambda\, (\alpha\, x) = (\lambda\, \alpha)\, x$,
  donc $\beta_\alpha := \lambda\, \alpha$ convient pour **3**.
- **[3⇒1]** Supposons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, il existe $\beta_\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $u(\alpha\, x) = \beta_\alpha\, x$.
  On peut prendre $\alpha = 1$, et ainsi : $u(x) = \beta_1\, x$.
  Le nombre $\lambda := \beta_1$ convient donc pour **1**.

I.3 Sous-espaces propres

Propr. • Nature des sous-espaces propres

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$, λ une valeur propre de u.
Alors $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0_E\}$.

Démo. Puisque λ est une valeur propre de u, le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est effectivement défini, et :
$$E_\lambda(u) = \big\{x \in E \;/\; u(x) = \lambda\, x\big\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{id}_E).$$
Ce sous-espace propre est le noyau d'une application linéaire définie sur E, donc c'est un sous-espace vectoriel de E.
De plus, puisque λ est valeur propre de u, il existe un vecteur propre x_0 associé à la valeur propre λ. Ce vecteur vérifie $u(x_0) = \lambda\, x_0$ donc $x_0 \in E_\lambda(u)$.
Mais $x_0 \neq 0_E$ car un vecteur propre ne peut pas être le vecteur nul.
Ainsi : $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$.

Propr. • Stabilité des sous-espaces propres

Soit E un espace vectoriel, $u, v \in \mathscr{L}(E)$, λ une valeur propre de u.

1) Si v commute avec u, alors $E_\lambda(u)$ est stable par v.

2) $E_\lambda(u)$ est stable par u, et u induit sur $E_\lambda(u)$ l'homothétie de rapport λ.

Démo. **1)** Puisque v commute avec u, il commute aussi avec $u - \lambda\, \mathrm{id}_E$:
$$\begin{aligned}(u - \lambda\, \mathrm{id}_E) \circ v &= u \circ v - \lambda\, \mathrm{id}_E \circ v = u \circ v - \lambda\, v \\ &= v \circ u - v \circ (\lambda\, \mathrm{id}_E) = v \circ (u - \lambda\, \mathrm{id}_E).\end{aligned}$$
On en déduit que $\mathrm{Ker}(u - \lambda\, \mathrm{id}_E)$, qui n'est autre que $E_\lambda(u)$, est stable par v.

2) Puisque u commute avec lui-même, le premier point s'applique donc $E_\lambda(u)$ est stable par u. Notons $F := E_\lambda(u)$ pour alléger les notations et constatons que l'endomorphisme induit par u sur F est $\lambda\,\mathrm{id}_F$:

$$\forall x \in F = E_\lambda(u) : \quad u(x) = \lambda x = \lambda\,\mathrm{id}_F(x) = (\lambda\,\mathrm{id}_F)(x).$$

II Éléments propres en dimension finie

II.1 Compléments pour les endomorphismes en dimension finie

Propr. • Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) λ est valeur propre de u ;
2) L'endomorphisme $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas *bijectif* ;
3) $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$;
4) $\mathrm{rg}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \dim(E)$;
5) $\det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0$.

Démo. **Tout s'appuie sur l'observation de l'endomorphisme $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$.**
Comme $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ est un endomorphisme de E **et que E est dimension finie,** on a :

$$u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ est bijectif} \iff u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ est injectif} \iff u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ est surjectif.}$$

En prenant le contraire de chaque proposition :

$$\begin{aligned}(2)\ u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non bijectif} &\iff (\neg I)\ u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non injectif}\\ &\iff (\neg S)\ u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non surjectif.}\end{aligned}$$

Passons à la démonstration du théorème :

- Le noyau sert à caractériser l'injectivité ; un endormorphisme est injectif *si et seulement si* son noyau est l'espace nul :

$$(\neg I)\quad u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non injectif} \iff \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\} \quad (3).$$

  De plus, comme $\mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_E)$ contient de toute façon le vecteur nul, il est différent de l'espace nul *si et seulement si* il contient un vecteur non nul :

$$\begin{aligned}(3)\quad \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \{0_E\} &\iff \exists\, x_0 \in E \,/\, x_0 \neq 0_E \text{ et } (u - \lambda\,\mathrm{id}_E)(x_0) = 0_E\\ &\iff \exists\, x_0 \in E \,/\, x_0 \neq 0_E \text{ et } u(x_0) = \lambda x_0\\ &\iff \lambda \text{ est valeur propre de } u \quad (1).\end{aligned}$$

- Le rang caractérise quant à lui la surjectivité des applications linéaires ; un endomorphisme est sujectif *si et seulement si* son rang est égal à la dimension de son espace d'arrivée :

$$(\neg S)\quad u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non surjectif} \iff \mathrm{rg}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \dim(E) \quad (4).$$

- Enfin, le déterminant caractérise la bijectivité des endomorphismes ; un endomorphisme est bijectif *si et seulement si* son déterminant est non nul :

$$(2)\quad u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non bijectif} \iff \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0 \quad (5).$$

II.2 Éléments propres d'une matrice carrée

Propos. • Correspondance vectoriel/matriciel pour les éléments propres

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E ;
$u \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$,
$\lambda \in \mathbb{K}$, $x, e_1, \ldots, e_p$ des vecteurs de E ;
$V, E_1, \ldots, E_p$ les matrices de leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.
Alors :

1) λ est valeur propre de u *si et seulement si* λ est valeur propre de A ;
2) x est vecteur propre de u associé à λ *si et seulement si* V est vecteur propre de A associé à λ ; $x \in E_\lambda(u) \iff V \in E_\lambda(A)$;
3) l'endomorphisme u et la matrice A ont le même spectre ;
4) pour toute valeur propre λ de u : $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $E_\lambda(u)$ *si et seulement si* $(V_1, \ldots, V_p)$ est une base de $E_\lambda(A)$;
$E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(A)$ ont même dimension.

Démo. Puisque, relativement à la base $\mathscr{B}$, u a pour matrice A et x a pour matrice V, on a :

$$u(x) = \lambda x \iff AV = \lambda V.$$

Dans toute la preuve, on notera $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ les vecteurs de la base $\mathscr{B}$ (qui contrôle de passage de part et d'autre du du miroir).

1) λ est valeur propre de u

$$\begin{aligned}&\iff \exists\, x \in E \,/\, x \neq 0_E \text{ et } u(x) = \lambda x\\ &\overset{*}{\iff} \exists\, V \in \mathbb{K}^n \,/\, V \neq 0_{n,1} \text{ et } AV = \lambda V\\ &\iff \lambda \text{ est valeur propre de } A.\end{aligned}$$

Plus précisément : $\overset{*}{\Longrightarrow}$ se montre en prenant $V := \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(x)$,
$\overset{*}{\Longleftarrow}$ en notant $V = (v_1, \ldots, v_n)$ et en prenant $x := \sum_{k=1}^{n} v_i\,\varepsilon_i$.

2) x est vecteur propre de u associé à λ

$$\begin{aligned}&\iff x \neq 0_E \text{ et } u(x) = \lambda x\\ &\iff V \neq 0_{n,1} \text{ et } AV = \lambda V\\ &\iff V \text{ est vecteur propre de } A \text{ associé à } \lambda.\end{aligned}$$

De même : $x \in E_\lambda(u)$

$$\begin{aligned}&\iff x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)\\ &\iff V \in \mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{I}_n)\\ &\iff V \in E_\lambda(A).\end{aligned}$$

3) $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$

$$\begin{aligned}&\iff \lambda \text{ est valeur propre de } u\\ &\iff \lambda \text{ est valeur propre de } A\\ &\iff \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\ ;\end{aligned}$$

donc : $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$.

4) Pour relier les sous-espaces propres de u et de A, on fixe une valeur propre λ de u (et donc de A) et on construit un isomorphisme entre $E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(A)$:

$$\Psi: \left| \begin{array}{rcl} E_\lambda(u) & \longrightarrow & E_\lambda(A) \\ x & \longmapsto & \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(x). \end{array} \right.$$

L'application Ψ est bien un **isomorphisme** car :

- Elle est **bien définie** : si $x \in E_\lambda(u)$, alors $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(x) \in E_\lambda(A)$ d'après **2)**.
- Elle est **linéaire** car l'application $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}$ est linéaire (cours de sup).
- Elle est **injective** car l'application $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}$ est injective (idem).
- Elle est **surjective :** prenons un élément $V = (v_1, \dots, v_n)$ de $E_\lambda(A)$.
  Le vecteur $x := \sum_{k=1}^{n} v_i\, \varepsilon_i$ se trouve dans $E_\lambda(u)$ d'après **2)**,
  et $\Psi(x) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(x) = V$: x est un antécédent de V par Ψ.

Ainsi, les espaces $E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(A)$ sont de dimension finie et isomorphes, donc $\dim E_\lambda(u) = \dim E_\lambda(A)$.
Par ailleurs, les isomorphismes transportent les bases dans les deux sens, donc $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $E_\lambda(u)$ *si et seulement si* $(V_1, \dots, V_p)$ est une base de $E_\lambda(A)$.

II.3 Polynôme caractéristique

Lemme • Soit $C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées.
Alors l'application $x \mapsto \det(x\,C - D)$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n :

$$\exists\, P \in \mathbb{K}_n[X] \;/\; \forall\, x \in \mathbb{K} : \quad \det(x\,C - D) = P(x).$$

Démo. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ les propositions :

$$\mathscr{H}(n) : \quad « \;\forall\, C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists\, P \in \mathbb{K}_n[X] \;/\; \forall\, x \in \mathbb{K} :\ \det(x\,C - D) = P(x). \;»$$

- **Initialisation :** pour $n = 1$, prenons $C = c\,\mathrm{I}_1, D = d\,\mathrm{I}_1 \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \det(x\,C - D) &= \det\big(x\,c\,\mathrm{I}_1 - d\,\mathrm{I}_1\big) = \det\big((c\,x - d)\,\mathrm{I}_1\big) = c\,x - d \\ &= P(x), \end{aligned}$$

  si l'on pose $P := c\,X - d \in \mathbb{K}_1[X]$. $\mathscr{H}(1)$ est établie.

- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{H}(n)$ est vraie. Montrons $\mathscr{H}(n+1)$.
  Prenons $C = (c_{i,j}), D = (d_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, en développant le déterminant par rapport à sa dernière colonne :

$$\det(x\,C - D) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n+1}\,(x\,c_{i,n+1} - d_{i,n+1})\,\det\big(M_i(x)\big),$$

  où $M_i(x)$ est la matrice obtenue en supprimant, dans $x\,C - D$, la ligne i et la colonne $n+1$. C'est aussi la matrice $x\,C_i - D_i$, en effectuant les mêmes suppressions dans les matrices C et D.
  Puisque les matrices C_i et D_i sont de taille n, **l'hypothèse $\mathscr{H}(n)$ s'applique :** il existe des polynômes $P_i \in \mathbb{K}_n[X]$ tels que :

$$\forall\, i \in [\![1,\, n+1]\!] : \quad \det\big(M_i(x)\big) = P_i(x).$$

  On en déduit que :

$$\begin{aligned} \det(x\,C - D) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n+1}\,(c_{i,n+1}\,x - d_{i,n+1})\,P_i(x) \\ &= P(x) \quad \text{si l'on introduit le polynôme :} \end{aligned}$$

$$P(X) := \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n+1}\,(c_{i,n+1}\,X - d_{i,n+1})\,P_i(X).$$

  Comme tous les polynômes P_i sont de degré au plus n, le polynôme P ci-dessus est de degré au plus $n+1$: **$\mathscr{H}(n+1)$ est donc démontrée.**

Propr. • Propriétés élémentaires du polynôme caractéristique
Soit A une matrice carrée de taille $n \geqslant 1$. Alors :

1) Le polynôme χ_A est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n.

2) 3 des coefficients de χ_A ont une expression simple :
- ∗ son coefficient dominant vaut $c_n = 1$, autrement dit χ_A est unitaire ;
- ∗ son coefficient de degré $n-1$ vaut : $c_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$;
- ∗ son coefficient constant vaut : $c_0 = (-1)^n \det(A)$.

3) Les valeurs propres de A sont exactement les racines du polynôme caractéristique χ_A.

Démo.
- D'après le lemme (avec $C \leftarrow \mathrm{I}_n$ et $D \leftarrow A$), χ_A existe et c'est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré au plus n. **Il restera à montrer que $\deg(\chi_A) = n$ exactement ; nous le constaterons plus bas en montrant que son coefficient de degré n vaut toujours 1.**
  Concernant son coefficient constant c_0, il est égal à la valeur de χ_A en 0 :

$$c_0 = \chi_A(0) = \det(0\,.\,\mathrm{I}_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

  Le point **3)** découle de la caractérisation des valeurs propres par le déterminant. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A &\iff \det(A - \lambda\,\mathrm{I}_n) = 0 \\ &\iff (-1)^n \det(A - \lambda\,\mathrm{I}_n) = 0 \\ &\iff \det(\lambda\,\mathrm{I}_n - A) = 0 \\ &\iff \chi_A(\lambda) = 0 \\ &\iff \lambda \text{ est racine de } \chi_A. \end{aligned}$$

  Ainsi, les valeurs propres de A sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.

- Il reste à démontrer, pour toute taille $n \geqslant 1$ de matrice :

  $\mathscr{H}(n)$: « Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors les coefficients (c_i) du polynôme χ_A vérifient $c_n = 1$ et $c_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$. »

  - **Le cas $n = 1$ est traité hors récurrence.**
    Soit $A = a\,\mathrm{I}_1 \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$. Alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(x) = \det(x\,I_1 - A) = \det(x\,\mathrm{I}_1 - a\,\mathrm{I}_1) = \det\big((x-a)\,\mathrm{I}_1\big) = x - a.$$

    Ainsi : $\chi_A = X - a$ et ses coefficients vérifient $c_n = c_1 = 1$ et $c_{n-1} = c_0 = -a = -\operatorname{tr}(A)$. **$\mathscr{H}(1)$ est établie.**

- **Le cas $n=2$ est le cas d'initialisation.**
Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Alors :
$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(x) = \det(x\,\mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d)-b\,c$$
$$= x^2-(a+d)\,x+(a\,d-b\,c).$$
Ainsi : $\chi_A = X^2-(a+d)X+(a\,d-b\,c) = X^2-\mathrm{tr}(A)X+\det(A)$. **$\mathscr{H}(2)$ est démontrée.**

- **Hérédité.** Soit $n \geqslant 2$ un entier pour lequel $\mathscr{H}(n)$ est vraie. Montrons $\mathscr{H}(n+1)$.
Pour cela, prenons $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ quelconque.
On développe le déterminant définissant $\chi_A(x)$ par rapport à la dernière colonne :
$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(x) = \det(x\,\mathrm{I}_{n-1}-A) = \begin{vmatrix} x-a_{1,1} & \cdots & -a_{1,n} & -a_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n,1} & \cdots & x-a_{n,n} & -a_{n,n+1} \\ -a_{n+1,1} & \cdots & -a_{n,n+1} & x-a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n+1}(-a_{i,n+1})\,D_i(x) + (-1)^{2n+2}(x-a_{n+1,n+1})\,D_{n+1}(x)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i}\,a_{i,n+1}\,D_i(x) + (x-a_{n+1,n+1})\,D_{n+1}(x) \qquad (*)$$
où les déterminants $D_i(x)$ s'écrivent :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad D_i(x) = \begin{vmatrix} x-a_{1,1} & \cdots & -a_{1,i-1} & -a_{1,i} & \cdots & \cdots & -a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -a_{i-1,1} & \cdots & x-a_{i-1,i-1} & -a_{i-1,i} & \cdots & \cdots & -a_{i-1,n} \\ -a_{i+1,1} & \cdots & -a_{i+1,i-1} & -a_{i+1,i} & x-a_{i+1,i+1} & & -a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & -a_{i+2,i+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & x-a_{n,n} \\ -a_{n+1,1} & \cdots & -a_{n+1,i-1} & -a_{n+1,i} & \cdots & \cdots & -a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$
$$\text{et} \quad D_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} x-a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & x-a_{n,n} \end{vmatrix}$$
Dans ces écritures, on remarque que :
  - $D_{n+1}(x)$ est la valeur en x du polynôme caractéristique de la matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en rayant la n^{e} ligne et la n^{e} colonne de A : c'est $\chi_B(x)$. Par l'hypothèse de récurrence, ce polynôme s'écrit :
  $$\chi_B = X^n - \mathrm{tr}(B)X^{n-1} + P(X) \quad \text{où } P \in \mathbb{K}_{n-2}[X].$$
  - Les déterminants $D_i(x)$ sont de taille $n \geqslant 2$ et leur dernière ligne ne comporte pas de x. On peut développer une nouvelle fois ces déterminants par rapport à la dernière ligne. On obtient une combinaison linéaire de déterminants de taille $n-1$ de la forme $\det(x\,C-D)$: il s'agit d'expressions polynomiales en x de degré au plus $n-1$ d'après le lemme. Formellement :
  $$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \exists Q_i \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\ /\ \forall x \in \mathbb{K}, \quad D_i(x) = Q_i(X).$$

L'expression $(*)$ se réécrit donc sous la forme suivante :
$$\chi_A(X) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i}\,a_{i,n+1}\,Q_i(X) + (X-a_{n+1,n+1})\,\chi_B(X)$$
$$= (X-a_{n+1,n+1})\big(X^n - \mathrm{tr}(B)X^{n-1}+P(X)\big) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}\,a_{i,n+1}\,Q_i(X)$$
$$= X^{n+1} - \big(\mathrm{tr}(B)+a_{n+1,n+1}\big)X^n + R(X),$$
en posant $\quad R(X) := (X-a_{n+1,n+1})\underbrace{P(X)}_{\mathrm{d}^\circ\leqslant n-2} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}\,a_{i,n+1}\underbrace{Q_i(X)}_{\mathrm{d}^\circ\leqslant n-1},$

qui est un polynôme de degré au plus $n-1$. Remarquons enfin que :
$$\mathrm{tr}(B)+a_{n+1,n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + a_{n+1,n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i,i} = \mathrm{tr}(A)$$
et l'on obtient :
$$\chi_A(X) = X^{n+1} - \mathrm{tr}(A)X^n + \underbrace{R(X)}_{\mathrm{d}^\circ\leqslant n-1}.$$
Dans cette écriture apparaissent les deux coefficients de degré maximal de χ_A : $c_{n+1}=1$ et $c_n=-\mathrm{tr}(A)$. **$\mathscr{H}(n+1)$ est démontrée.**

III Diagonalisation en dimension finie

III.1 Définitions et caractérisation par les vecteurs propres

Propr. • Condition nécessaire de diagonalisabilité
Si un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable,
alors son spectre est non vide.

Démo. Supposons un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable : il existe une base de E formée de vecteurs propres de u. Comme ces vecteurs propres sont associés à des valeurs propres de u, il existe au moins une valeur propre de u donc $\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$.
De même, si une matrice A est diagonlisable sur $\mathbb{K}$, il existe une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A, donc A admet au moins une valeur propre dans $\mathbb{K}$.

Propr. • Condition suffisante de diagonalisabilité
Si un endomorphisme d'un espace de dimension n (resp. une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) admet n valeurs propres distinctes, alors il (resp. elle) est diagonalisable.

Démo. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où $\dim(E)=n$. Supposons que u admette n valeurs propres disctincts $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Pour chaque valeur propre λ_k, il existe un vecteur propre x_k de u associé.
Comme ces valeurs propres sont distinctes, la famille $\mathscr{F} := (x_1,\dots,x_n)$ est libre ; puisque $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n = \dim(E)$, c'est une base de E.
Ainsi, $\mathscr{F}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de u : l'endomorphisme u est donc diagonalisable.
On raisonne de même pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en remplaçant E par $\mathbb{K}^n$.

IV Utilisation des polynômes annulateurs pour la diagonalisation

IV.1 Polynômes annulateurs et diagonalisation

Thm • Caractérisation de la diagonalisabilité par les polynômes annulateurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) L'endomorphisme u est diagonalisable.

2) Le polynôme $Z(X) := \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u.

3) u admet un polynôme annulateur **simplement scindé.**

Ce théorème reste vrai en remplaçant u par une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Démo. Les implications **[1⇒2]** et **[2⇒3]** ont été montrées en cours.

[3⇒1] Supposons que P soit un polynôme annulateur scindé à racines simples de u.

- Ce polynôme s'écrit donc :

$$P = c \prod_{k=0}^{q} (X - \alpha_k) \quad \text{où } c \neq 0 \text{ et les } \alpha_k \text{ sont des scalaires distincts.}$$

Comme P est un polynôme annulateur de u, on a :

$$c\,(u - \alpha_0\, \mathrm{id}_E) \circ (u - \alpha_1\, \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \alpha_q\, \mathrm{id}_E) = \mathbf{0}. \qquad (\spadesuit)$$

- Les α_k ne sont pas forcément des valeurs propres de u.
Quitte à les réordonner, on peut supposer que $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ sont des valeurs propres de u, et que $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_q$ n'en sont pas.
Les endomorphismes $(u - \alpha_k\, \mathrm{id}_E)$ sont donc bijectifs pour pour $k \in [\![p+1, q]\!]$;
en composant à droite ($\spadesuit$) par les $(u - \alpha_k\, \mathrm{id}_E)^{-1}$, pour k variant de q à $p+1$, et en divisant par $c \neq 0$, on obtient :

$$(u - \alpha_0\, \mathrm{id}_E) \circ (u - \alpha_1\, \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \alpha_p\, \mathrm{id}_E) = \mathbf{0} \quad ;$$

en d'autres termes : le polynôme $Q(X) := \prod_{k=0}^{p} (X - \alpha_k)$ est également un polynôme annulateur de u, et toutes ses racines sont des valeurs propres de u.

- Comme $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ sont des scalaires disctints, on peut considérer les polynômes interpolateur de Lagrange $L_0, \dots, L_p$ associés. On sait que :

$$\sum_{k=0}^{p} L_k(X) = 1, \quad \text{donc en appliquant en } u \in \mathscr{L}(E) : \quad \sum_{k=0}^{p} L_k(u) = \mathrm{id}_E. \qquad (\diamondsuit)$$

Montrons que la somme des sous-espaces propres $E_{\alpha_k}(u)$ vaut E, ce qui suffira à prouver que u est diagonalisable.

Rem. ◇ ***1)*** *Noter que ces espaces sont effectivement des sous-espaces propres car les α_k sont des valeurs propres de u.*

2) *Rien ne garantit que toutes les valeurs propres de u soient présentes, mais ce n'est pas nécessaire dans la caractérisation des endomorphismes diagonalisables par les sous-espaces propres.*

∗ On a immédiatement l'inclusion $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} E_{\alpha_k}(u) \subset E$
car les $E_{\alpha_k}(u)$ sont par définition des sous-espaces vectoriels de E.

∗ Pour l'inclusion réciproque, prenons un vecteur $x \in E$ quelconque, et montrons qu'il peut se décomposer sur cette somme de sous-espaces.
En appliquant ($\diamondsuit$) au vecteur x, il vient :

$$x = \sum_{k=0}^{p} \big[L_k(u)\big](x). \qquad (\clubsuit)$$

Appelons x_k les vecteurs $\big[L_k(u)\big](x)$.
Montrons que chaque x_k se trouve dans le sous-espace propre $E_{\alpha_k}(u)$.
Pour cela, on calcule leur image par $(u - \alpha_k\, \mathrm{id}_E)$:

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![0, p]\!], \quad (u - \alpha_k\, \mathrm{id}_E)(x_k) &= (u - \alpha_k\, \mathrm{id}_E)\Big(\big[L_k(u)\big](x)\Big) \\
&= \Big[(u - \alpha_k\, \mathrm{id}_E) \circ L_k(u)\Big](x) \\
&= \Big[\big((X - \alpha_k) \times L_k\big)(u)\Big](x).
\end{aligned}$$

Calculons le polynôme $(X - \alpha_k) \times L_k$ en utilisant la définition des polynômes L_k :

$$\begin{aligned}
(X - \alpha_k) \times L_k &= (X - \alpha_k) \times \frac{1}{C_k} \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant p \\ j \neq k}} (X - \alpha_j) \\
&= \frac{1}{C_k} \prod_{j=0}^{p} (X - \alpha_j) \\
&= \frac{1}{C_k} Q(X).
\end{aligned}$$

Pour obtenir $(u - \alpha_k\, \mathrm{id}_E)(x_k)$, il reste à appliquer ce polynôme en l'endomorphisme u, puis à évaluer l'endomorphisme obtenu au vecteur x.
Mais puisque Q est un polynôme annulateur de u :

$$\forall k \in [\![0, p]\!] : \quad (u - \alpha_k\, \mathrm{id}_E)(x_k) = \left[\frac{1}{C_k} Q(u)\right](x) = \mathbf{0}(x) = 0_E.$$

On a bien $x_k \in \mathrm{Ker}(u - \alpha_k\, \mathrm{id}_E) = E_{\alpha_k}(u)$.

La relation ($\clubsuit$) prouve donc que $x \in \displaystyle\sum_{k=0}^{p} E_{\alpha_k}(u)$,

et finalement, que : $E \subset \displaystyle\sum_{k=0}^{p} E_{\alpha_k}(u)$.

V Trigonalisation en dimension finie

Coroll. • « Dans $\mathbb{C}$, tout est automatiquement trigonalisable »

Toute matrice carrée à coefficients complexes, ainsi que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, sont trigonalisables.

Démo. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Son polynôme caractéristique χ_A est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré $n \geqslant 1$: il est donc non constant. Par le théorème fondamental de l'algèbre, ce polynôme est donc scindé ; on en déduit que la matrice A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.
On raisonne de même pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

Corrections d'exercices

***Exercice* 3** ► **1)** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme $\Delta\colon \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$.

2) Mêmes questions pour l'endomorphisme $\delta\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P'$. Commenter.

Solution

1) Résolvons l'équation aux éléments propres.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus \{(x \mapsto 0)\}$ quelconques :

$$\begin{aligned} \Delta(f) = \lambda f &\iff f' = \lambda f \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}:\ f'(x) = \lambda f(x) \\ &\iff f \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équa. diff. } y' = \lambda f. \end{aligned}$$

Cette équation a pour solution toute fonction de la forme $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, où C est une constante réelle. Cette constante ne peut pas être nulle car sinon f serait la fonction nulle. Ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta(f) = \lambda f &\iff \exists\, C \in \mathbb{R}^* \,/\, \forall x \in \mathbb{R}:\ f(x) = C\,\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &\iff \exists\, C \in \mathbb{R}^* \,/\, f = C\,.\big(x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\big). \end{aligned}$$

Pour chaque réel λ, on a trouvé des vecteurs propres de Δ, qui sont les multiples non nuls de la fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$.

Conclusion. Tous les réels λ sont valeurs propres de Δ, et les vecteurs propres associés à λ sont les fonctions $C\,.\,\varepsilon_\lambda$, où $\varepsilon_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ et $C \in \mathbb{R}^*$.

2) On étudie l'équation aux éléments propres $\delta(P) = \lambda P$, d'inconnues $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$.

- **Analyse.** Supposons que λ et P conviennent : alors $P' = \lambda P$.
  Puisque P est non nul, $\deg(P) \in \mathbb{N}$ (ce n'est pas $-\infty$), et on peut écrire ce polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, où $d = \deg(P) \in \mathbb{N}$ et $a_d \neq 0$.
  L'égalité $P' = \lambda P$ devient :
  $$\sum_{k=1}^{d} a_k\,.\,kX^{k-1} = \sum_{k=0}^{d} \lambda\, a_k X^k \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{d-1} (k+1)\, a_{k+1} X^k = \sum_{k=0}^{d} \lambda\, a_k X^k.$$
  En identifiant les coefficients de degré d, on obtient :
  $$0 = \lambda\, a_d \quad \text{et comme } a_d \neq 0, \text{ nécessairement } \quad \lambda = 0.$$
  De ce fait, on a aussi $P' = 0$, d'où P est un polynôme constant.
- **Synthèse.** Prenons $\lambda = 0$ et $P = a$ un polynôme constant non nul.
  On a bien $\delta(P) = P' = 0 = 0\,.\,P$,
  donc P est vecteur propre de δ pour la valeur propre 0.

Conclusion. L'endomorphisme $\delta : P \mapsto P'$ défini sur $\mathbb{R}[X]$ a une unique valeur propre : 0. Les vecteurs propres associés sont les polynômes constants non nuls.

Rem. ◇ Sur l'exemple des endomorphismes de dérivation, on constate que l'espace de définition de l'endomorphisme est très important pour l'étude des valeurs propres :

- Sur $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tout les réels λ sont valeurs propres de l'endomorphisme Δ de dérivation ;
- Sur $E' = \mathbb{R}[X]$, seul 0 est valeur propre de l'endomorphisme δ de dérivation.
- La dérivation sur l'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ **n'est pas un endomorphisme :** ses images f' ne sont pas toujours dérivables elles-mêmes. Cela explique pourquoi on se place sur l'espace E des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

***Exercice* 4** ► Soit E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E tel que tout vecteur non nul de E soit vecteur propre de u.
Montrer que u est une homothétie.

Solution

Il s'agit de montrer que u est une homothétie, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &\exists\, \alpha \in \mathbb{K} \,/\ u = \alpha\, \mathrm{id}_E \\ \text{c.à.d.}\quad &\exists\, \alpha \in \mathbb{K} \,/\ \forall x \in E,\quad u(x) = \alpha\, \mathrm{id}_E(x) \\ \text{c.à.d.}\quad &\exists\, \alpha \in \mathbb{K} \,/\ \forall x \in E,\quad u(x) = \alpha\, x. \end{aligned}$$

Prenons un vecteur $x \in E$ non nul. D'après l'hypothèse, x est un vecteur propre de u, donc il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda\, x$.

Attention ❢ Ce scalaire λ **dépend de x !** On a démontré ici :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \,/\quad u(x) = \lambda\, x,$$

ce qui est encore assez loin de ce qui est souhaité du fait de l'ordre des quantificateurs (le vecteur 0_E et la notation λ au lieu de α ne posent pas de problème sérieux).

Comme E est de dimension finie, on peut considérer une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et regarder la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.
Puisque e_k est non nul pour chaque $k \in [\![1,n]\!]$, e_k est un vecteur propre de u

pour une certaine valeur propre λ_k.
La matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est donc diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & (0) \\ (0) & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Montrons que tous les λ_k sont égaux.
Prenons $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$.
Le vecteur $e_i + e_j$ est non nul (sinon la famille $\mathscr{B}$ serait liée),
donc c'est un vecteur propre de u ; il existe un scalaire μ tel que :

$$u(e_i + e_j) = \mu(e_i + e_j) \quad \text{donc} \quad u(e_i) + u(e_j) = \mu\, e_i + \mu\, e_j$$
$$\text{d'où} \quad \lambda_i\, e_i + \lambda_j\, e_j = \mu\, e_i + \mu\, e_j.$$

Comme la famille (e_i, e_j) est libre, on peut identifier les coefficients et obtenir :

$$\begin{cases} \lambda_i = \mu \\ \lambda_j = \mu \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lambda_i = \lambda_j.$$

On a prouvé que tous les λ_k étaient égaux ; notons leur valeur commune α.
On obtient alors :

$$M = \alpha\, \mathrm{I}_n \quad \text{donc} \quad \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(u) = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(\alpha\, \mathrm{id}_E) \quad \text{d'où} \quad u = \alpha\, \mathrm{id}_E.$$

L'endomorphisme u est bien une homothétie.

Rem. ◇ **L'hypothèse de dimension finie n'est pas nécessaire pour conlure.**
En dimension quelconque, on montre que, pour tout vecteur x non nul, il existe un $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x \,.\, x$. Il s'agit ensuite de démontrer que tous les λ_x sont égaux ; on prend deux vecteurs $x, y \in E$ non nuls et on distingue deux cas :
- si (x, y) est une famille libre de E, on calcule comme ci-dessus $u(x + y)$ de deux manières ;
- si (x, y) est liée, comme $x \neq 0_E$, y s'écrit $\beta\, x$ et on calcule $u(y)$ de deux manières.

On constate ainsi que tous les λ_x sont égaux à un unique scalaire α, donc que $u(x) = \alpha \,.\, x$ pour tout $x \in E$ (y compris 0_E!)

***Exercice* 8** ► On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ suivant : $u \colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x-2y-z \\ x-y-z \\ 22x-20y-3z \end{pmatrix}$.

1) En examinant des rangs, montrer que -2, -1 et 1 sont des valeurs propres de u.

2) En déduire la dimension de chaque sous-espace propre associé.

3) Trouver un vecteur propre V_1, V_2, V_3 associé à chaque valeur propre.

4) Justifier que $\mathscr{B}' = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est la matrice de u dans cette base ?

Solution

1) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque, constatons que :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est v.p. de } u &\iff u - \lambda\, \mathrm{id} \text{ n'est pas injectif} \\ &\iff \mathrm{rg}(u - \lambda\, \mathrm{id}) \neq \dim(\mathbb{R}^3) \quad (\mathbb{R}^3 = \text{espace de départ de } u) \\ &\iff \mathrm{rg}(A - \lambda\, \mathrm{I}_3 \neq 3), \end{aligned}$$

en notant A la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Cette matrice est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 22 & -20 & -3 \end{pmatrix}$.

- $A + 2\,\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 22 & -20 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car : $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + 2\,\mathrm{C}_3 = 0_{3,1}$; C_1 et C_2 sont non colinéaires.
- $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 22 & -20 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car : $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = 0_{3,1}$; C_1 et C_2 sont non colinéaires.
- $A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 22 & -20 & -4 \end{pmatrix}$ est de rang 2 car : $\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 = 0_{1,3}$; L_2 et L_3 sont non colinéaires.

Conclusion. Aucune des 3 matrices n'est de rang 3 : cela prouve que -2, -1 et 1 sont des valeurs propres de u.

2) Pour chaque valeur propre λ de A, le théorème du rang donne :

$$\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda\, \mathrm{I}_3) = 3 - \mathrm{rg}(A - \lambda\, \mathrm{I}_3) \quad \text{donc} \quad \dim E_\lambda(u) = 3 - \mathrm{rg}(A - \lambda\, \mathrm{I}_3).$$

Puisque ces 3 matrices sont de rang 2, les 3 sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

3) Les relations sur les <u>**colonnes**</u> des matrices a montré que :

$$V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A + 2\,\mathrm{I}_3) = \mathrm{Ker}(u + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = E_{-2}(u)$$
$$V_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = E_{-1}(u).$$

Pour la troisième valeur propre, on effectue des opérations sur les lignes de $A - \mathrm{I}_3$ pour échelonner la matrice et simplifier le problème :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 22 & -20 & -4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 18 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sur cette dernière matrice, on remarque que : $2\,C_1 + 3\,C_2 - 4\,C_3 = 0_{3,1}$.
(explication : les coefficients devant C_2 et C_3 nous sont donnés par la dernière ligne ; on en déduit celui devant C_1 en exploitant la première ligne)
C'est donc que : $V_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - I_3) = E_1(u)$.

4) Pour prouver que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, on remarque que cette famille comporte 3 vecteurs et on calcule son déterminant dans la base canonique : il est non nul, donc il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$.
Comme les V_k sont des vecteurs propres de u, on obtient immédiatement :

$$\underset{(V_1,V_2,V_3)}{\mathrm{mat}}(u) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice **11** ► Soit n un entier au moins égal à 3 et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Déterminer une valeur propre évidente de M et la dimension du sous-espace propre associé.

2) Déterminer les autres valeurs propres de M en résolvant l'équation aux éléments propres.

Solution

1) On remarque que M n'est pas inversible car car $C_1 = C_n$ (et $n \geqslant 2$) : donc 0 est valeur propre de M.
Calculons son rang en éliminant les rangées inutiles :

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{2 colonnes} \\ \text{non colinéaires}}} = 2.$$

Par le théorème du rang : $\dim E_0(M) = n - \mathrm{rg}(M) = n - 2$.

2) Prenons $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{n,1}\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et résolvons l'équation aux éléments propres :

$$M\,V = \lambda\,V.$$

On suppose que $\lambda \neq 0$ car ce cas a déjà été traité ; on procède par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Supposons que $M\,V = \lambda\,V$. Nécessairement :

$$(*)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \lambda\,x_1 \\ x_1 + x_n = \lambda\,x_2 \\ \quad\vdots \\ x_1 + x_n = \lambda\,x_{n-1} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \lambda\,x_n. \end{cases}$$

dont en retient :
$$\begin{cases} \lambda\,x_2 = \lambda\,x_3 = \cdots = \lambda\,x_{n-1} \\ \lambda\,x_1 = \lambda\,x_n, \end{cases}$$
puis, en divisant par $\lambda \neq 0$:
$$\begin{cases} x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1} \\ x_1 = x_n. \end{cases}$$

Notons $a = x_1$ et $b = x_2$; alors $V = (a, b, b, \ldots, b, a)$.
Les deux premières lignes se réécrivent : $\begin{cases} 2\,a + (n-2)\,b = \lambda\,a \\ 2\,a = \lambda\,b \end{cases}$
donc $\lambda\,b + (n-2)\,b = \frac{\lambda^2}{2}\,b$, puis $\left(\lambda^2 - 2\,\lambda - (2n-4)\right)\,b = 0$.
Mais $b \neq 0$, car sinon a s'annulerait et le vecteur V également.
En divisant par b : $\lambda^2 - 2\,\lambda - (2n-4) = 0$.
Cette équation du deuxième degré a pour discriminant

$$\Delta = 4 + 4\,(2n-4) = 4\,(2n-3) > 0 \quad \text{car } n \geqslant 3.$$

On en déduit : $\lambda = 1 \pm \sqrt{2n-3}$, $V = b\left(\frac{\lambda}{2}, 1, \ldots, 1, \frac{\lambda}{2}\right)$ et $b \neq 0$.

- **Synthèse.** On ne suppose plus que $M\,V = \lambda\,V$.
Prenons $\lambda := 1 + \sqrt{2n-3}$, $b \neq 0$ et $V := \left(\frac{\lambda}{2}\,b, b, \ldots, b, \frac{\lambda}{2}\,b\right) \neq 0_{n,1}$.
On vérifie que $(*)$ est satisfait :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - \lambda\,x_1 = \lambda\,b + (n-2)\,b - \frac{\lambda^2}{2}\,b = 0$$

car λ est solution de l'équation du second degré de l'analyse.
De plus : $x_1 + x_n = \lambda\,b = \lambda\,x_2 = \lambda\,x_3 = \cdots = \lambda\,x_{n-1}$.
La dernière équation est vraie elle aussi.
On a bien $M\,V = \lambda\,V$: $\lambda = 1 + \sqrt{2n-3}$ est bien valeur de propre de M.
La preuve est la même pour $\lambda = 1 - \sqrt{2n-3}$.

Conclusion. Les valeurs propres de M sont 0, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2n-3}$ et $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2n-3}$.

Exercice **12** ► Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1) Calculer J^2.

2) En déduire les éléments propres de J.

Solution

1) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nJ.$

2) Comme $J^2 = nJ$, le polynôme $P = X^2 - nX$ est annulateur.
Les valeurs propres de J se trouvent parmi ses racines : 0 et n.
Testons-les l'une après l'autre :

∗ **Pour $\boldsymbol{\lambda = 0}$:** $\mathrm{rg}(J) = 1 < n$ donc 0 est bien valeur propre de J.
Par le théorème du rang : $\dim(E_0(J)) = n-1$.
On cherche donc une famille libre de $(n-1)$ vecteurs de J.
Dans la matrice J :
$\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_2$ donc $V_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0(J)$; $\mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_3$ donc $V_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0(J)$;

etc. jusqu'à $\mathrm{C}_{n-1} = \mathrm{C}_n$ donc $V_{n-1} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_0(J)$.

Calculons le rang de $(V_1, \dots, V_{n-1})$:

$$\mathrm{rg}(V_1, \dots, V_{n-1}) = \mathrm{rg} \begin{bmatrix} 1 & & (0) & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & \ddots & \\ (0) & & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} = n-1$$

car la matrice est échelonnée en colonnes ; la famille est bien libre donc c'est une base de $E_0(J)$.

∗ **Pour $\boldsymbol{\lambda = n}$:** Dans $J - n\,\mathrm{I}_n$, on remarque que la somme des colonnes est nulle.
Cela prouve que n est bien valeur propre de J,
et que $V_n := (1, \dots, 1)$ est un vecteur propre associé.
De plus, comme $E_0(J)$ est de dimension 1 et que la somme cumulée des dimensions des SEP ne peut pas dépasser n, $E_n(J)$ est de dimension 1 ; de ce fait (V_n) en constitue une base.

***Exercice* 18** ► Trouver un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & 2 \\ 4 & -9 & 2 \end{bmatrix}$.

Solution

Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que le polynôme caractéristique χ_A est un polynôme annulateur de A. Calculons-le :

$$\begin{aligned}
\chi_A = \det(X\,I_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-1 & 3 & -3 \\ -2 & X+5 & -2 \\ -4 & 9 & X-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+2 & 3 & -3 \\ 0 & X+5 & -2 \\ -X-2 & 9 & X-2 \end{vmatrix} = (X+2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & X+5 & -2 \\ -1 & 9 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= (X+2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & X+5 & -2 \\ 0 & 12 & X-5 \end{vmatrix} = (X+2) \begin{vmatrix} X+5 & -2 \\ 12 & X-5 \end{vmatrix} = (X+2)\left[(X+5)(X-5)+24\right] \\
&= (X+2)\left[X^2 - 1\right] \\
&= (X+2)(X-1)(X+1).
\end{aligned}$$

(On a effectué les opérations sur les rangées : $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_3$ puis $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1$)

Conclusion. La matrice A admet pour polynôme annulateur $(X+2)(X-1)(X+1)$ (et, accessoirement, son spectre est $\{-2, 1, -1\}$).

***Exercice* 24** ► Calculer le polynôme caractéristique des matrices suivantes, puis dire si elles sont diagonalisables ; les diagonaliser dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ quand c'est possible :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 9 & 5 & -18 \\ 6 & 4 & -11 \end{pmatrix}.$$

Solution

- **Matrice $\boldsymbol{A}$:** $\chi_A = X \cdot (X-2) \cdot (X+5)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$: la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $\mathbb{C}$), et les 3 SEP sont des droites.
On trouve comme vecteurs propres :

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad V_{-5} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

donc on obtient comme diagonalisation :

$$A = P\,D\,P^{-1} \quad \text{pour} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & . & . \\ . & 2 & . \\ . & . & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -9 \\ 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice $\boldsymbol{B}$:** $\chi_B = (X-2) \cdot (X^2 - 2 \cdot X + 2)$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
En revanche, $\chi_B = (X-2) \cdot (X-1-\mathrm{i}) \cdot (X-1-\mathrm{i})$ est simplement scindé sur $\mathbb{C}$,

donc B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
On trouve comme vecteurs propres :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_{1+\mathrm{i}} = \begin{pmatrix} -1-2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad V_{1-\mathrm{i}} = \overline{V_{1+\mathrm{i}}} = \begin{pmatrix} -1+2\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

et comme diagonalisation dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$B = P\,D\,P^{-1} \quad \text{pour} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & . & . \\ . & 1+\mathrm{i} & . \\ . & . & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1-2\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice M :** $\chi_M = (X-4)^2 \cdot (X-2)$ est scindé sur $\mathbb{R}$, mais pas à racines simples.
  Regardons si la dimension des SEP est égale aux ordres de multiplicité :
  - ∗ Comme 2 est valeur propre simple, $\dim E_2(M) = 1 = \mathrm{m}_2(M)$.
  - ∗ Pour la valeur propre 4, on détermine $\dim E_4(M)$:

  $$M - 4\,\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{est de rang } 1,$$

  donc par le théorème du rang, $\dim E_4(M) = 3 - 1 = 2 = \mathrm{m}_4(M)$.
  La matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $\mathbb{C}$).
  On trouve comme vecteurs propres :

  $$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad V_4' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  et comme diagonalisation dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

  $$M = P\,D\,P^{-1} \quad \text{pour} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & . & . \\ . & 4 & . \\ . & . & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- **Matrice N :** $\chi_N = (X-1) \cdot (X+1)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$, mais pas à racines simples.
  Comme pour M, $\dim E_1(N) = 1 = \mathrm{m}_1(N)$.
  Ensuite, $N + \mathrm{I}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 4 & -8 \\ 9 & 6 & -18 \\ 6 & 4 & -10 \end{smallmatrix}\right)$ est de rang 2,
  donc $\dim E_{-1}(N) = 3 - 2 = 1 \neq 2 = \mathrm{m}_{-1}(N)$.
  La matrice N n'est diagonalisable si sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathbb{C}$.
  En revanche, comme χ_N est scindé sur $\mathbb{R}$, N est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $\mathbb{C}$).

***Exercice* 25** ► Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que M est diagonalisable.

Solution

M est symétrique **à coefficients réels** donc elle est diagonalisable.

***Exercice* 26** ► **1)** Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ qui soit symétrique, non nulle, mais de trace et de déterminant nul.

2) Cette matrice A est-elle diagonalisable ?
Quel enseignement tire-t-on de cet exemple ?

Solution

1) Prenons $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ quelconque. Par analyse-synthèse :

- **Analyse.** Supposons que A convienne.
  Puisque A est symétrique, $c = b$; puisque $\mathrm{tr}(A) = 0$, $d = -a$.
  Donc $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right)$ et $\det(A) = -(a^2 + b^2)$.
  Comme $\det(A) = 0$, $b^2 = -a^2 = (\mathrm{i}\,a)^2$, d'où $b = \pm \mathrm{i}\,a$.
- **Synthèse.** Si on prend $a = 1$ et que conformément à l'analyse, on prend $b = c = \mathrm{i}$ et $d = -1$, la matrice A obtenue est $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Elle convient effectivement.

2) • La matrice A a pour polynôme caractéristique

$$\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2.$$

On en déduit qu'elle a une unique valeur propre : 0.
Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $\mathrm{diag}(0,0) = 0_2$, donc on aurait $A = P\,0_2\,P^{-1} = 0_2$.
Ce n'est pas le cas, donc A n'est pas diagonalisable.

- On a trouvé une matrice A qui est symétrique, et pourtant non diagonalisable. Dans le théorème précédent, **l'hypothèse *« à coefficients réels »* est donc très importante.**