MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2025/2026.

Corrigé du DS n° 10.

Exercice 1 1. $x \longmapsto \dfrac{1}{3}\ln(1+e^{3x})$.

2. $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$.

Exercice 2 1. On procède par IPP avec $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$ (u et v sont de classe C^1), donc

$$\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e - [e^x]_0^1 = \boxed{1}$$

2. On procède par IPP avec $u'(x) = 1$ et $v(x) = \arctan(x)$ (u et v sont de classe C^1), donc

$$\int_0^1 \arctan(x)\mathrm{d}x = [x\arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(1) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}}$$

Exercice 3 1. Posons $x = e^t$: la fonction $t \mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $[0,1]$. Les nouvelles bornes sont $e^0 = 1$ et $e^1 = e$. De plus $t = \ln(x)$ donc $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t} = \int_1^e \frac{dx}{x(1+x)} = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = [\ln(x) - \ln(x+1)]_1^e = \boxed{1 + \ln(2) - \ln(e+1)}.$$

2. On peut effectuer le changement de variable $x = \sqrt{1+t}$ (fonction de classe C^1). Les nouvelles bornes sont $\sqrt{1+0} = 1$ et $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. De plus, on a $\boxed{\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{1+t}}}$. Enfin, $t = x^2 - 1$, donc

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}} (x^2-1) \times 2\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2}-1)}$$

Mais il est plus simple d'écrire que $\dfrac{t}{\sqrt{1+t}} = \dfrac{t+1-1}{\sqrt{t+1}} = \sqrt{t+1} - \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$, ce qui donne

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}t = \left[\frac{(t+1)^{3/2}}{3/2} - 2\sqrt{t+1}\right]_0^1 = \dots$$

Exercice 4 On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on calcule $\displaystyle\int_0^x \frac{3t+2}{t^2+t+1}\mathrm{d}t$. On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur :

$$\frac{3t+2}{t^2+t+1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{t^2+t+1}.$$

On intègre alors :

$$\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t = \ln|x^2+x+1|.$$

Pour l'autre terme :

$$t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left((t+1/2)^2+1\right)\right) = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right),$$

et donc

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = \frac{4}{3}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Finalement, une primitive de la fonction recherchée est

$$\boxed{x \longmapsto \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}.$$

Exercice 5 On pose, pour $(a,b,n,m) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^2$, $I_{m,n} = \displaystyle\int_a^b (t-a)^m(t-b)^n\,\mathrm{d}t$. On intègre par parties pour obtenir une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$, et on trouve

$$I_{m,n} = \left[(t-a)^m(t-b)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}\right]_a^b - \frac{m}{n+1}\int_a^b (t-a)^{m-1}(t-b)^{n+1}\,\mathrm{d}t = -\frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1}.$$

D'autre part, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{0,p} = \int_a^b (t-b)^p\,\mathrm{d}t = -\frac{(a-b)^{p+1}}{p+1}.$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$I_{m,n} = \frac{(-1)^{m+1}m(m-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} \times \frac{(a-b)^{m+n+1}}{(m+n+1)}.$$

En particulier, l'intégrale recherchée vaut $I_{n,n}$, c'est-à-dire

$$I_{n,n} = (-1)^{n+1}\frac{n!}{(n+1)\cdots(2n)}\frac{(a-b)^{2n+1}}{2n+1} = \boxed{(-1)^{n+1}\frac{(a-b)^{2n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}}.$$